$S_0 \in \mathscr{E}_0\}$. Очевидно, что $S \in \mathscr{E}$. Убедимся в дискретности S, что и завершит доказательство.

Пусть $S' \in (\operatorname{dom} S)^{\#}$ таков, что $0 \le S'(x_0) \le S(x_0)$ для всех $x_0 \in (\operatorname{dom} S)_+$. Если $S(x_0) = 0$ для любого такого x_0, то $S' = 0S$, что и нужно. Если же $S(x_0) \neq 0$ для некоторого $x_0 \in (\operatorname{dom} S)_+$, то выберем $S_0 \in \mathscr{E}_0$ из условия $S_0(x_0) = S(x_0)$. Тогда в силу дискретности S_0 можно записать: $S'(x') = \alpha S(x')$ для всех $x' \in \operatorname{dom} S_0$. При этом $\alpha = S'(x_0)/S(x_0)$, т. е. α не зависит от выбора S_0. Поскольку $\mathscr{E}_0$ — цепь, заключаем: $S' = \alpha S$. ▷

3.4. Выпуклые функции и сублинейные функционалы

3.4.1. Определение. ***Полурасширенной числовой прямой*** $\mathbb{R}^{\cdot}$ называют множество $\mathbb{R}^{\cdot}$ с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. При этом полагают $\alpha(+\infty) := +\infty$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$, $+\infty + x := x + (+\infty) := +\infty$ $(x \in \mathbb{R}^{\cdot})$.

3.4.2. Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — некоторое отображение. Множество

$$\operatorname{epi} f := \{(x,\ t) \in X \times \mathbb{R} :\ t \ge f(x)\}$$

называют ***надграфиком*** f, а множество

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X :\ f(x) < +\infty\}$$

— ***эффективной областью определения*** функции f.

3.4.3. Замечание. Непоследовательность в применении символа $\operatorname{dom} f$ кажущаяся. Именно, эффективная область определения функции $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ совпадает с областью определения однозначного соответствия $f \cap X \times \mathbb{R}$ из X в $\mathbb{R}$. В этой связи при $\operatorname{dom} f = X$ будем, как и прежде, писать $f : X \to \mathbb{R}$, опуская точку в $\mathbb{R}^{\cdot}$.

3.4.4. Определение. Пусть X — вещественное векторное пространство. Отображение $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют ***выпуклой функцией***, если надграфик $\operatorname{epi} f$ — это выпуклое множество.

3.4.5. *Отображение $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ является выпуклой функцией в том и только в том случае, если имеет место неравенство Йенсена, т. е.*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

как только $\alpha_1,\ \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ *и* $x_1,\ x_2 \in X$.

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Если выбраны числа $\alpha_1,\ \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_1+\alpha_2 = 1$ и один из векторов x_1, x_2 не входит в $\operatorname{dom} f$, то доказывать нечего — неравенство Йенсена очевидно. Пусть $x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} f$. Тогда $(x_1,\ f(x_1)) \in \operatorname{epi} f$ и $(x_2,\ f(x_2)) \in \operatorname{epi} f$. Стало быть, с учетом 3.1.2 (8), $\alpha_1(x_1,\ f(x_1)) + \alpha_2(x_2,\ f(x_2)) \in \operatorname{epi} f$.

$\Leftarrow$: Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — функция и $(x_1,\ t_1) \in \operatorname{epi} f,\ (x_2,\ t_2) \in \operatorname{epi} f$, т. е. $t_1 \ge f(x_1)$ и $t_2 \ge f(x_2)$ (в случае $\operatorname{dom} f = \varnothing$ будет $f(x) = +\infty$ $(x \in X)$ и $\operatorname{epi} f = \varnothing$). Привлекая неравенство Йенсена, видим, что для $\alpha_1,\ \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ справедливо $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) \in \operatorname{epi} f$. $\triangleright$

3.4.6. Определение. Отображение $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют *сублинейным функционалом*, если надграфик $\operatorname{epi} p$ — это конус.

3.4.7. *При* $\operatorname{dom} p \ne 0$ *эквивалентны утверждения*:

(1) *p является сублинейным функционалом*;

(2) *p — выпуклая функция, удовлетворяющая условию положительной однородности*: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ *при всех* $\alpha \ge 0$ *и* $x \in \operatorname{dom} p$;

(3) *для любых* $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ *и* $x_1,\ x_2 \in X$ *выполнено* $p(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 p(x_1) + \alpha_2 p(x_2)$;

(4) *p — положительно однородный функционал, удовлетворяющий условию субаддитивности*: $p(x_1 + x_2) \le p(x_1) + p(x_2)$ *для всех* $x_1,\ x_2 \in X$. $\triangleleft\triangleright$

3.4.8. Примеры.

(1) Линейный функционал сублинеен, в то время как аффинный функционал — выпуклая функция.

(2) Пусть U — выпуклое множество в X. Положим

$$\delta(U)(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in U, \\ +\infty, & \text{если } x \notin U. \end{cases}$$

Отображение $\delta(U) : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют *индикаторной функцией* множества U. Ясно, что $\delta(U)$ — выпуклая функция. Если U — конус, то

$\delta(U)$ — сублинейный функционал. Если U — аффинное множество, то $\delta(U)$ — аффинный функционал.

(3) Сумма конечного числа выпуклых функций и точная верхняя граница (или верхняя огибающая) семейства выпуклых функций (вычисляемая поточечно, т. е. в $(\mathbb{R}^{\cdot})^X$) суть выпуклые функции. Аналогичные свойства наблюдают у сублинейных функционалов.

(4) Суперпозиция выпуклой функции с *аффинным оператором* (т. е. со всюду определенным однозначным аффинным соответствием) является выпуклой функцией. Суперпозиция сублинейного функционала с линейным оператором — сублинейный функционал.

3.4.9. Определение. Пусть X — векторное пространство, а U и V — два подмножества в X. Говорят, что U *поглощает* V, если найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $V \subset nU$. Множество U называют *поглощающим* (в X), если U поглощает каждую точку в X, т. е. $X = \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nU$.

3.4.10. *Пусть $T \subset X \times Y$ — линейное соответствие, причем $\operatorname{im} T = Y$. Если U поглощающее (в X), то $T(U)$ поглощающее (в Y).*

$\lhd$ $Y = T(X) = T(\cup_{n\in\mathbb{N}}\, nU) = \cup_{n\in\mathbb{N}} T(nU) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nT(U)$ $\rhd$

3.4.11. Определение. Пусть U — подмножество векторного пространства X. Точка x из U принадлежит *ядру* $\operatorname{core} U$ множества U (или *алгебраически внутренняя в* U), если множество $U - x$ — поглощающее в X.

3.4.12. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция и $x \in \operatorname{core}\operatorname{dom} f$. Для всякого $h \in X$ существует*

$$f'(x)(h) := \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \inf_{\alpha>0} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha}.$$

При этом отображение $f'(x) : h \mapsto f'(x)h$ является сублинейным функционалом $f'(x) : X \to \mathbb{R}$.

$\lhd$ Пусть $\varphi(\alpha) := f(x+\alpha h)$. В силу 3.4.8 (4) отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — это выпуклая функция. При этом $0 \in \operatorname{core}\operatorname{dom}\varphi$. Отображение $\alpha \mapsto (\varphi(\alpha) - \varphi(0))/\alpha \quad (\alpha > 0)$ возрастает и ограничено снизу, т. е. имеется $\varphi'(0)(1)$. По определению $f'(x)(h) = \varphi'(0)(1)$.

Для $\beta > 0$ и $h \in H$ последовательно получаем

$$f'(x)(\beta h) = \inf \frac{f(x+\alpha\beta h) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= \beta \inf \frac{f(x+\alpha\beta h) - f(x)}{\alpha\beta} = \beta f'(x)(h).$$

Кроме того, для $h_1,\ h_2 \in X$ в силу уже установленного

$$f'(x)(h_1 + h_2) = 2 \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{1}{2}\alpha(h_1 + h_2)\right) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= 2 \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}(x + \alpha h_1) + \frac{1}{2}(x + \alpha h_2)\right) - f(x)}{\alpha} \leq$$

$$\leq \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x + \alpha h_1) - f(x)}{\alpha} + \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x + \alpha h_2) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= f'(x)(h_1) + f'(x)(h_2).$$

Ссылка на 3.4.7 завершает доказательство. $\triangleright$

3.5. Теорема Хана — Банаха

3.5.1. Определение. Пусть X — вещественное векторное пространство, $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция и $x \in \operatorname{dom} f$. Множество

$$\partial_x(f) := \{l \in X^{\#} : (\forall\, y \in X) \quad l(y) - l(x) \leq f(y) - f(x)\}$$

называют *субдифференциалом* функции f *в точке* x.

3.5.2. Примеры.

(1) Пусть $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — сублинейный функционал. Положим $\partial(p) := \partial_0(p)$. Тогда

$$\partial(p) = \{l \in X^{\#} : (\forall\, x \in X) \quad l(x) \leq p(x)\};$$

$$\partial_x(p) = \{l \in \partial(p) :\ l(x) = p(x)\}.$$