Для $\beta > 0$ и $h \in H$ последовательно получаем

$$f'(x)(\beta h) = \inf \frac{f(x+\alpha\beta h) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= \beta \inf \frac{f(x+\alpha\beta h) - f(x)}{\alpha\beta} = \beta f'(x)(h).$$

Кроме того, для $h_1,\ h_2 \in X$ в силу уже установленного

$$f'(x)(h_1+h_2) = 2\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\alpha(h_1+h_2)\right) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= 2\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}(x+\alpha h_1)+\frac{1}{2}(x+\alpha h_2)\right) - f(x)}{\alpha} \leq$$

$$\leq \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f(x+\alpha h_1) - f(x)}{\alpha} + \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{f(x+\alpha h_2) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= f'(x)(h_1) + f'(x)(h_2).$$

Ссылка на 3.4.7 завершает доказательство. $\triangleright$

3.5. Теорема Хана — Банаха

3.5.1. Определение. Пусть X — вещественное векторное пространство, $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция и $x \in \operatorname{dom} f$. Множество

$$\partial_x(f) := \{l \in X^{\#} : (\forall\, y \in X) \quad l(y) - l(x) \leq f(y) - f(x)\}$$

называют *субдифференциалом* функции f *в точке* x.

3.5.2. Примеры.

(1) Пусть $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — сублинейный функционал. Положим $\partial(p) := \partial_0(p)$. Тогда

$$\partial(p) = \{l \in X^{\#} : (\forall\, x \in X) \quad l(x) \leq p(x)\};$$

$$\partial_x(p) = \{l \in \partial(p) :\ l(x) = p(x)\}.$$

(2) Пусть $l \in X^{\#}$. Тогда $\partial(l) = \partial_x(l) = \{l\}$.

(3) Пусть X_0 — подпространство X. Тогда

$$\partial(\delta(X_0)) = \{l \in X^{\#} :\ \ker l \supset X_0\}.$$

(4) Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция и при этом выполнено $x \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f$. Тогда

$$\partial_x(f) = \partial(f'(x)). \ \triangleleft\triangleright$$

3.5.3. Теорема Хана — Банаха. *Пусть $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — линейный оператор, $f : Y \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклая функция, а точка $x \in X$ такова, что $Tx \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f$. Тогда*

$$\partial_x(f \circ T) = \partial_{Tx}(f) \circ T.$$

$\triangleleft$ На основании 3.4.10 заключаем, что $x \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f$. Применяя 3.5.2 (4), имеем $\partial_x(f \circ T) = \partial((f \circ T)'(x))$. Помимо этого, для $h \in X$ выполнено

$$(f \circ T)'(x)(h) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{(f \circ T)(x + \alpha h) - (f \circ T)(x)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(Tx + \alpha Th) - f(Tx)}{\alpha} = f'(Tx)(Th).$$

Положим $p := f'(Tx)$. Вновь апеллируя к 3.5.2 (4) и учитывая, что, в силу 3.4.12, p — это сублинейный функционал, выводим:

$$\partial(p) = \partial(f'(Tx)) = \partial_{Tx}(f);$$

$$\partial(p \circ T) = \partial((f \circ T)'(x)) = \partial_x(f \circ T).$$

Таким образом, осталось доказать равенство

$$\partial(p \circ T) = \partial(p) \circ T.$$

Если $l \in \partial(p) \circ T$, т. е. $l = l_1 \circ T$, где $l_1 \in \partial(p)$, то $l_1(y) \leq p(y)$ для любого $y \in Y$. В частности, $l(x) \in l_1(Tx) \leq p(Tx) = p \circ T(x)$ при всех $x \in X$, т. е. $l \in \partial(p \circ T)$. Итак, $\partial(p) \circ T \subset \partial(p \circ T)$.

Пусть теперь $l \in \partial(p \circ T)$. Если $Tx = 0$, то $l(x) \leq p(Tx) = p(0) = 0$, т. е. $l(x) \leq 0$. То же верно для элемента $-x$. Окончательно $l(x) = 0$. Другими словами, $\ker l \supset \ker T$. Значит, по теореме 2.3.8, $l = l_1 \circ T$ для некоторого $l_1 \in Y^{\#}$. Полагая $Y_0 := T(X)$ и обозначая символом ι вложение Y_0 в Y, видим, что функционал $l_1 \circ \iota$ входит в $\partial(p \circ \iota)$. Если мы покажем, что $\partial(p \circ \iota) \subset \partial(p) \circ \iota$, то для подходящего $l_2 \in \partial(p)$ будет $l_1 \circ \iota = l_2 \circ \iota$. Отсюда $l = l_1 \circ T = l_1 \circ \iota \circ T = l_2 \circ \iota \circ T = l_2 \circ T$, т. е. $l \in \partial(p) \circ T$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы Хана — Банаха следует установить только, что $\partial(p \circ \iota) \subset \partial(p) \circ \iota$.

Возьмем элемент l_0 из $\partial(p \circ \iota)$ и в подпространстве $\mathfrak{Y}_0 := Y_0 \times \mathbb{R}$ пространства $\mathfrak{Y} := Y \times \mathbb{R}$ рассмотрим функционал $T_0 : (y_0,\ t) \mapsto t - l_0(y_0)$. Упорядочим $\mathfrak{Y}$ с помощью конуса $\mathfrak{Y}_+ := \operatorname{epi} p$. Заметим, во-первых, что подпространство $\mathfrak{Y}_0$ является массивным в силу тождества

$$(y,\ t) = (0,\ t - p(y)) + (y,\ p(y)) \quad (y \in Y,\ t \in \mathbb{R}).$$

Во-вторых, при $(y_0,\ t) \in \mathfrak{Y}_0 \cap \mathfrak{Y}_+$, на основании 3.4.2, $t \geq p(y_0)$ и, стало быть, $T_0(y_0,\ t) = t - l_0(y_0) \geq 0$, т. е. T_0 — положительный функционал на $\mathfrak{Y}_0$. По теореме 3.3.4 найдется положительный функционал T на $\mathfrak{Y}$, продолжающий T_0. Положим $l(y) := T(-y,\ 0)$ для $y \in Y$. Ясно, что $l \circ \iota = l_0$. Помимо этого, $T(0,\ t) = T_0(0,\ t) = t$. Следовательно, $0 \leq T(y,\ p(y)) = p(y) - l(y)$, т. е. $l \in \partial(p)$. $\triangleright$

3.5.4. Замечание. Утверждение теоремы 3.5.3 именуют также *формулой линейной замены переменной под знаком субдифференциала*, подразумевая бросающуюся в глаза связь со стандартным цепным правилом дифференциального исчисления. Отметим здесь же, что включение $\partial(p \circ \iota) \subset \partial(p) \circ \iota$ часто называют «теоремой Хана — Банаха в аналитической форме» и выражают словами: «линейный функционал, заданный на подпространстве векторного пространства и мажорируемый там сублинейным функционалом, допускает продолжение на все пространство до линейного функционала, мажорируемого исходным сублинейным функционалом».

3.5.5. *Следствие.* *Пусть X — векторное пространство, X_0 — подпространство в X и $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал. Имеет место (несимметричная) формула Хана — Банаха:*

$$\partial(p + \delta(X_0)) = \partial(p) + \partial(\delta(X_0)).$$

◁ Включение правой части искомой формулы в ее левую часть очевидно. Для доказательства противоположного включения возьмем $l \in \partial(p + \delta(X_0))$. Тогда $l \circ \iota \in \partial(p \circ \iota)$, где ι — вложение X_0 в X. По 3.5.3, $l \circ \iota \in \partial(p) \circ \iota$, т. е. для подходящего $l_1 \in \partial(p)$ выполнено $l \circ \iota = l_1 \circ \iota$. Положим $l_2 := l - l_1$. Из определения получаем $l_2 \circ \iota = (l - l_1) \circ \iota = l \circ \iota - l_1 \circ \iota = 0$, т. е. $\ker l_2 \supset X_0$. Как отмечено в 3.5.2 (3), это означает, что $l_2 \in \partial(\delta(X_0))$. ▷

3.5.6. *Следствие.* *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — некоторая выпуклая функция и $x \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f$. Тогда $\partial_x(f) \neq \varnothing$.*

◁ Пусть $p := f'(x)$, а $\iota : 0 \to X$ — вложение. Ясно, что $0 \in \partial(p \circ \iota)$, т. е. $\partial(p \circ \iota) \neq \varnothing$. По 3.5.3, $\partial(p) \neq \varnothing$ (иначе было бы $\varnothing = \partial(p) \circ \iota = \partial(p \circ \iota)$). Осталось привлечь 3.5.2 (4). ▷

3.5.7. *Следствие.* *Пусть $f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — выпуклые функции и $x \in \operatorname{core} \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{core} \operatorname{dom} f_2$. Тогда*

$$\partial_x(f_1 + f_2) = \partial_x(f_1) + \partial_x(f_2).$$

◁ Пусть $p_1 := f_1'(x)$ и $p_2 := f_2'(x)$. Для $x_1,\ x_2 \in X$ положим $p(x_1,\ x_2) := p_1(x_1) + p_2(x_2)$ и $\iota(x_1) := (x_1,\ x_1)$. Используя 3.5.2 (4) и 3.5.3, последовательно выводим:

$$\partial_x(f_1 + f_2) = \partial(p_1 + p_2) = \partial(p \circ \iota) =$$

$$= \partial(p) \circ \iota = \partial(p_1) + \partial(p_2) = \partial_x(f_1) + \partial_x(f_2). \ ▷$$

3.5.8. Замечание. Следствие 3.5.6 иногда называют *теоремой о непустоте субдифференциала.* С одной стороны, ее можно установить непосредственным применением леммы Куратовского — Цорна. С другой стороны, имея следствие 3.5.6, можно доказать, что $\partial(p \circ T) = \partial(p) \circ T$, следующим образом. Положим

$$p_T(y) := \inf\{p(y + Tx) - l(x) :\ x \in X\},$$

где $l \in \partial(p)$ и приняты обозначения из 3.5.3. Ясно, что функционал p_T сублинеен и любой элемент l_1 из $\partial(p_T)$ удовлетворяет соотношению $l = l_1 \circ T$. Итак, непустота субдифференциала и теорема Хана — Банаха в субдифференциальной форме образуют удобный (и не порочный) круг.