3.6. Теорема Крейна — Мильмана для субдифференциалов

3.6.1. Определение. Пусть X — вещественное векторное пространство и $\operatorname{seg} \subset X^2 \times X$ — соответствие, действующее по закону

$$\operatorname{seg}(x_1,\ x_2) := \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 :\ \alpha_1,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Пусть, далее, V — выпуклое множество в X и seg_V — сужение seg на V^2. Выпуклое множество U, лежащее в V, называют *крайним* в V, если $\operatorname{seg}_V^{-1}(U) \subset U^2$. Крайние множества иногда называют *гранями.* Точку x из V называют *крайней точкой* V, если $\{x\}$ — крайнее подмножество V. Множество крайних точек V обозначают символом $\operatorname{ext}(V)$.

3.6.2. *Множество U является крайним в V в том и только в том случае, если из условий $v_1,\ v_2 \in V,\ \alpha_1,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V$ вытекает, что $v_1 \in U$ и $v_2 \in U$.* $\lhd\rhd$

3.6.3. Примеры.

(1) *Пусть $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — сублинейный функционал и точка x из X входит в $\operatorname{dom} p$. Тогда $\partial_x(p)$ — крайнее подмножество $\partial(p)$.*

$\lhd$ Действительно, если для $\alpha_1,\ \alpha_2 > 0$ и $\alpha_1+\alpha_2 = 1$ известно, что $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \in \partial_x(p)$ и $l_1,\ l_2 \in \partial(p)$, то $0 = p(x) - (\alpha_1 l_1(x) + \alpha_2 l_2(x)) = \alpha_1(p(x) - l_1(x)) + \alpha_2(p(x) - l_2(x)) \geq 0$. Помимо этого, $p(x) - l_1(x) \geq 0$ и $p(x) - l_2(x) \geq 0$. Следовательно, $l_1 \in \partial_x(p)$ и $l_2 \in \partial_x(p)$. $\rhd$

(2) *Пусть U — крайнее множество в V и, в свою очередь, V — крайнее множество в W. Тогда U — крайнее множество в W.* $\lhd\rhd$

(3) *Пусть X — упорядоченное векторное пространство. Элемент $x \in X_+$ является дискретным в том и только в том случае, если луч $\{\alpha x :\ \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ представляет собой крайнее множество в конусе X_+.*

$\lhd$ $\Leftarrow$: Пусть $0 \leq y \leq x$. Тогда $x = 1/2\,(2y) + 1/2\,(2(x-y))$. В силу 3.6.2, $2y = \alpha x$ и $2(x-y) = \beta x$ для некоторых $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+$. Итак, $2x = (\alpha+\beta)x$. Если $x = 0$, то доказывать нечего. Если же $x \neq 0$, то $\alpha/2 \in [0,\ 1]$ и, стало быть, $[0,\ x] \subset [0,\ 1]x$. Обратное включение очевидно.

$\Rightarrow$: Пусть $[0,\ x] = [0,\ 1]x$ и для чисел $\alpha \geq 0$; $\alpha_1,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и элементов $y_1,\ y_2 \in X_+$ выполнено $\alpha x = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha_1 y_1 \in [0,\ x]$ и $\alpha_2 y_2 \in [0,\ x]$ и, стало быть, y_1 и y_2 лежат на рассматриваемом луче. Если же $\alpha > 0$, то $(\alpha_1/\alpha)y_1 = tx$ при подходящем $t \in [0,1]$. Наконец, $(\alpha_2/\alpha)y_2 = (1-t)x$. $\triangleright$

(4) Пусть U — выпуклое множество. Выпуклое подмножество V множества U называют *шапкой* U, если $U \setminus V$ — выпуклое множество.

Точка x в U является крайней в том и только в том случае, если $\{x\}$ — шапка множества U. $\triangleleft\triangleright$

3.6.4. *Лемма о крайней точке субдифференциала.* *Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал и $l \in \partial(p)$. Пусть, далее, $\mathscr{X} := X \times \mathbb{R}$, $\mathscr{X}_+ := \operatorname{epi} p$ и $T_l : (x,\ t) \mapsto t - l(x)$ $(x \in X,\ t \in \mathbb{R})$. Тогда l — крайняя точка $\partial(p)$ в том и только в том случае, если T_l — дискретный функционал.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Возьмем функционал $T' \in \mathscr{X}^\#$ такой, что $T' \in [0,\ T_l]$. Положим

$$t_1 := T'(0,\ 1), \quad l_1(x) := T'(-x,\ 0);$$

$$t_2 := (T_l - T')(0,\ 1), \quad l_2(x) := (T_l - T')(-x,\ 0).$$

Ясно, что $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_1 + t_2 = 1$; $l_1 \in \partial(t_1 p)$, $l_2 \in \partial(t_2 p)$ и $l_1 + l_2 = l$. Если $t_1 = 0$, то $l_1 = 0$, т. е. $T' = 0$ и $T' \in [0,\ 1]T_l$. Если же $t_2 = 0$, то $t_1 = 1$, т. е. $T' = T_l$ и вновь $T' \in [0,\ 1]T_l$. Пусть теперь $t_1,\ t_2 > 0$. Тогда $1/t_1\, l_1 \in \partial(p)$ и $1/t_2\, l_2 \in \partial(p)$, причем $l = t_1\,(1/t_1\, l_1) + t_2\,(1/t_2\, l_2)$. Поскольку по условию $l \in \operatorname{ext}(\partial(p))$, из 3.6.2 выводим $l_1 = t_1 l$, т. е. $T' = t_1 T_l$.

$\Leftarrow$: Пусть $l = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2$, где $l_1,\ l_2 \in \partial(p)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Функционалы $T' := \alpha_1 T_{l_1}$ и $T'' := \alpha_2 T_{l_2}$ положительны, причем $T' \in [0,\ T_l]$, ибо $T' + T'' = T_l$. Значит, найдется $\beta \in [0,\ 1]$, для которого $T' = \beta T_l$. Рассматривая точку $(0,1)$, получаем $\alpha_1 = \beta$. Следовательно, $l_1 = l$. Аналогично $l_2 = l$. $\triangleright$

3.6.5. *Теорема Крейна — Мильмана для субдифференциалов.* *Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал. Для всякого $x \in X$ найдется крайний функционал $l \in \operatorname{ext}(\partial(p))$ такой, что $l(x) = p(x)$.*

$\lhd$ Установим сначала теорему Крейна — Мильмана «в узком смысле», т. е. докажем, что в субдифференциале любого сублинейного функционала p есть крайние точки: $\operatorname{ext}(\partial(p)) \neq \varnothing$.

Введем в пространство $\mathscr{X} := X \times \mathbb{R}$ конус $\mathscr{X}_+ := \operatorname{epi} p$ и выделим подпространство $\mathscr{X}_0 := 0 \times \mathbb{R}$. Заметим, что $\mathscr{X}_+ \cap \mathscr{X}_0 = 0 \times \mathbb{R}_+ = \operatorname{epi} 0$. Применяя 3.6.4 для случая $X := 0$, $l := 0$ и $p := 0$, видим, что T_0 — это дискретный функционал на $\mathscr{X}_0$. Подпространство $\mathscr{X}_0$ в $\mathscr{X}$ массивное (ср. доказательство 3.5.3). Апеллируя к 3.3.8, подыщем дискретное продолжение $T \in \mathscr{X}^{\#}$ функционала T_0. Понятно, что $T = T_l$, где $l(x) := T(-x,\ 0)$ при $x \in X$. Вновь привлекая 3.6.4, приходим к соотношению $l \in \operatorname{ext}(\partial(p))$.

Установим теперь теорему в полном объеме. На основании 3.4.12 и уже доказанного выберем элемент l из $\operatorname{ext}(\partial_x(p'(x)))$. Из 3.5.2 (2) и 3.5.2 (4) вытекает: $l \in \operatorname{ext}(\partial_x(p))$. По 3.6.3 (1), $\partial_x(p)$ — крайнее множество в $\partial(p)$. Таким образом, в силу 3.6.3 (2) функционал l является крайней точкой субдифференциала $\partial(p)$. $\rhd$

3.6.6. *Следствие.* *Пусть $p_1,\ p_2 : X \to \mathbb{R}$ — сублинейные функционалы. Неравенство $p_1 \geq p_2$ (в $\mathbb{R}^X$) справедливо в том и только в том случае, если $\partial(p_1) \supset \operatorname{ext}(\partial(p_2))$.*

$\lhd$ Бесспорно, что $p_1 \geq p_2 \Leftrightarrow \partial(p_1) \supset \partial(p_2)$. Кроме того, по 3.6.5, $p_2(x) = \sup\{l(x) :\ l \in \operatorname{ext}(\partial(p_2))\}$. $\rhd$

3.7. Теорема Хана — Банаха для полунормы

3.7.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Векторное пространство $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot|_{\mathbb{R}\times X})$ называют ***вещественной основой*** пространства $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ и обозначают коротко символом $X_{\mathbb{R}}$.

3.7.2. Определение. Пусть X — векторное пространство и $f \in X^{\#}$ — линейный функционал. Положим $\mathbf{Re}\, f : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ $(x \in X)$. Возникающее отображение $\mathbf{Re} : (X^{\#})_{\mathbb{R}} \to (X_{\mathbb{R}})^{\#}$ называют ***овеществлением.***

3.7.3. *Овеществление* $\mathbf{Re}$ *— это изоморфизм вещественных векторных пространств $(X^{\#})_{\mathbb{R}}$ и $(X_{\mathbb{R}})^{\#}$.*

$\lhd$ Следует разобрать только случай $\mathbb{F} := \mathbb{C}$, ибо при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ оператор $\mathbf{Re}$ — тождественное отображение.