$\lhd$ Установим сначала теорему Крейна — Мильмана «в узком смысле», т. е. докажем, что в субдифференциале любого сублинейного функционала p есть крайние точки: $\operatorname{ext}(\partial(p)) \neq \varnothing$.

Введем в пространство $\mathscr{X} := X \times \mathbb{R}$ конус $\mathscr{X}_+ := \operatorname{epi} p$ и выделим подпространство $\mathscr{X}_0 := 0 \times \mathbb{R}$. Заметим, что $\mathscr{X}_+ \cap \mathscr{X}_0 = 0 \times \mathbb{R}_+ = \operatorname{epi} 0$. Применяя 3.6.4 для случая $X := 0$, $l := 0$ и $p := 0$, видим, что T_0 — это дискретный функционал на $\mathscr{X}_0$. Подпространство $\mathscr{X}_0$ в $\mathscr{X}$ массивное (ср. доказательство 3.5.3). Апеллируя к 3.3.8, подыщем дискретное продолжение $T \in \mathscr{X}^\#$ функционала T_0. Понятно, что $T = T_l$, где $l(x) := T(-x,\ 0)$ при $x \in X$. Вновь привлекая 3.6.4, приходим к соотношению $l \in \operatorname{ext}(\partial(p))$.

Установим теперь теорему в полном объеме. На основании 3.4.12 и уже доказанного выберем элемент l из $\operatorname{ext}(\partial_x(p'(x)))$. Из 3.5.2 (2) и 3.5.2 (4) вытекает: $l \in \operatorname{ext}(\partial_x(p))$. По 3.6.3 (1), $\partial_x(p)$ — крайнее множество в $\partial(p)$. Таким образом, в силу 3.6.3 (2) функционал l является крайней точкой субдифференциала $\partial(p)$. $\rhd$

3.6.6. *Следствие.* *Пусть $p_1,\ p_2 : X \to \mathbb{R}$ — сублинейные функционалы. Неравенство $p_1 \geq p_2$ (в $\mathbb{R}^X$) справедливо в том и только в том случае, если $\partial(p_1) \supset \operatorname{ext}(\partial(p_2))$.*

$\lhd$ Бесспорно, что $p_1 \geq p_2 \Leftrightarrow \partial(p_1) \supset \partial(p_2)$. Кроме того, по 3.6.5, $p_2(x) = \sup\{l(x) :\ l \in \operatorname{ext}(\partial(p_2))\}$. $\rhd$

3.7. Теорема Хана — Банаха для полунормы

3.7.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Векторное пространство $(X,\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot|_{\mathbb{R}\times X})$ называют *вещественной основой* пространства $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot)$ и обозначают коротко символом $X_\mathbb{R}$.

3.7.2. Определение. Пусть X — векторное пространство и $f \in X^\#$ — линейный функционал. Положим $\mathbf{Re}\, f : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ $(x \in X)$. Возникающее отображение $\mathbf{Re} : (X^\#)_\mathbb{R} \to (X_\mathbb{R})^\#$ называют *овеществлением.*

3.7.3. *Овеществление* $\mathbf{Re}$ *— это изоморфизм вещественных векторных пространств $(X^\#)_\mathbb{R}$ и $(X_\mathbb{R})^\#$.*

$\lhd$ Следует разобрать только случай $\mathbb{F} := \mathbb{C}$, ибо при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ оператор $\mathbf{Re}$ — тождественное отображение.

Линейность оператора **Re** не вызывает сомнений. Убедимся в том, что **Re** — мономорфизм и эпиморфизм одновременно (ср. 2.3.2).

Если $\mathbf{Re}\, f = 0$, то

$$0 = \operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re}(if(x)) =$$

$$= \operatorname{Re}(i(\operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x))) = -\operatorname{Im} f(x).$$

Отсюда $f = 0$ и **Re** — мономорфизм.

Если теперь $g \in (X_{\mathbb{R}})^{\#}$, то положим $f(x) := g(x) - ig(ix)$. Очевидно, что $f \in \mathscr{L}(X_{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}_{\mathbb{R}})$ и $\operatorname{Re} f(x) = g(x)$ при $x \in X$. Осталось проверить, что $f(ix) = if(x)$, ибо тогда $f \in X^{\#}$. Прямое вычисление $f(ix) = g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x)$ позволяет заключить, что **Re** — эпиморфизм. $\triangleright$

3.7.4. Определение. Оператор $\mathbf{Re}^{-1} : (X_{\mathbb{R}})^{\#} \to (X^{\#})_{\mathbb{R}}$ называют *комплексификатором.*

3.7.5. Замечание. В силу 3.7.3 для комплексного поля скаляров

$$\mathbf{Re}^{-1} g : x \mapsto g(x) - ig(ix) \quad (g \in (X_{\mathbb{R}})^{\#},\ x \in X).$$

В случае $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ комплексификатор $\mathbf{Re}^{-1}$ — тождественный оператор.

3.7.6. Определение. Пусть $(X,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot\,)$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Функцию $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют *полунормой*, если $\operatorname{dom} p \neq \varnothing$ и для $x_1,\ x_2 \in X$ и $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{F}$ выполнено

$$p(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq |\lambda_1| p(x_1) + |\lambda_2| p(x_2).$$

3.7.7. Замечание. Каждая полунорма является сублинейным функционалом (на вещественной основе рассматриваемого пространства).

3.7.8. Определение. Пусть $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма. Множество

$$|\partial|(p) := \{l \in X^{\#} :\ |l(x)| \leq p(x) \text{ при всех } x \in X\}$$

называют *субдифференциалом полунормы* p.

3.7.9. *Лемма о субдифференциале полунормы.* *Для любой полунормы $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ субдифференциалы $|\partial|(p)$ и $\partial(p)$ связаны соотношениями*

$$|\partial|(p) = \mathbf{Re}^{-1}(\partial(p)); \quad \mathbf{Re}\,(|\partial|(p)) = \partial(p).$$

$\triangleleft$ При $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ очевидно равенство $|\partial|(p) = \partial(p)$. Осталось вспомнить, что в этом случае отображение $\mathbf{Re}$ — тождественное.

Пусть $\mathbb{F} := \mathbb{C}$. Если $l \in |\partial|(p)$, то $(\mathbf{Re}\, l)(x) = \operatorname{Re} l(x) \le |l(x)| \le p(x)$ для всех $x \in X$, т. е. $\mathbf{Re}\,(|\partial|(p)) \subset \partial(p)$. Пусть теперь $g \in \partial(p)$ и $f := \mathbf{Re}^{-1} g$. Если $f(x) = 0$, то $|f(x)| \le p(x)$. Если же $f(x) \ne 0$, то положим $\theta := |f(x)|/f(x)$. Тогда $|f(x)| = \theta f(x) = f(\theta x) = \operatorname{Re} f(\theta x) = g(\theta x) \le p(\theta x) = |\theta| p(x) = p(x)$, ибо $|\theta| = 1$. Итак, $f \in |\partial|(p)$. $\triangleright$

3.7.10. *Пусть X — векторное пространство, $p : X \to \mathbb{R}$ — полунорма и X_0 — подпространство в X. Имеет место (несимметричная) формула Хана — Банаха для полунормы*

$$|\partial|(p + \delta(X_0)) = |\partial|(p) + |\partial|(\delta(X_0)).$$

$\triangleleft$ С помощью 3.7.9 и 3.5.5, выводим:

$$|\partial|(p + \delta(X_0)) = \mathbf{Re}^{-1}(\partial(p + \delta(X_0))) = \mathbf{Re}^{-1}(\partial(p) + \partial(\delta(X_0))) =$$
$$= \mathbf{Re}^{-1}(\partial(p)) + \mathbf{Re}^{-1}(\partial(\delta(X_0))) = |\partial|(p) + |\partial|(\delta(X_0)). \ \triangleright$$

3.7.11. *Пусть X, Y — векторные пространства, $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — линейный оператор и $p : Y \to \mathbb{R}$ — полунорма. Тогда $p \circ T$ — полунорма, причем*

$$|\partial|(p \circ T) = |\partial|(p) \circ T.$$

$\triangleleft$ Привлекая 2.3.8 и 3.7.10, последовательно имеем

$$|\partial|(p \circ T) = |\partial|(p + \delta(\operatorname{im} T)) \circ T = (|\partial|(p) + |\partial|(\delta(\operatorname{im} T))) \circ T =$$
$$= |\partial|(p) \circ T + |\partial|(\delta(\operatorname{im} T)) \circ T = |\partial|(p) \circ T. \ \triangleright$$

3.7.12. Замечание. В случае оператора вложения и комплексного поля скаляров 3.7.11 называют *теоремой Сухомлинова — Боненблюста — Собчика.*

3.7.13. *Теорема Хана — Банаха для полунормы.* *Пусть X — векторное пространство, $p : X \to \mathbb{R}$ — полунорма и X_0 — подпространство в X. Пусть, далее, l_0 — линейный функционал на X_0, для которого $|l_0(x_0)| \le p(x_0)$ при $x_0 \in X_0$. Тогда существует такой линейный функционал l на X, что $|l(x)| \le p(x)$ для всякого $x \in X$ и, кроме того, $l(x_0) = l_0(x_0)$, как только $x_0 \in X_0$.* $\triangleleft\triangleright$