3.8. Функционал Минковского и отделимость

3.8.1. Определение. Пусть $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая (т. е. $\mathbb{R}^{\cdot}$ с присоединенным наименьшим элементом $-\infty$). Если X — произвольное множество и $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — некоторое отображение, то для $t \in \overline{\mathbb{R}}$ полагают

$$\{f \leq t\} := \{x \in X : \ f(x) \leq t\};$$

$$\{f = t\} := f^{-1}(t);$$

$$\{f < t\} := \{f \leq t\} \setminus \{f = t\}.$$

Множества $\{f \leq t\}$, $\{f = t\}$, $\{f < t\}$ называют *лебеговыми множествами* f. Помимо этого, множества $\{f = t\}$ называют *множествами уровня*.

3.8.2. *Лемма о задании функции лебеговыми множествами.* *Даны $T \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $t \mapsto U_t$ $(t \in T)$ — семейство подмножеств X. Существует функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \leq t\} \quad (t \in T)$$

в том и только в том случае, если отображение $t \mapsto U_t$ возрастает.

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть T содержит не менее двух элементов s и t (в противном случае нечего доказывать). Если $s < t$, то

$$U_s \subset \{f \leq s\} \subset \{f < t\} \subset U_t.$$

$\Leftarrow$: Положим $f(x) := \inf\{t \in T : \ x \in U_t\}$. Тем самым задано отображение $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Если для некоторого $t \in T$ множество $\{f < t\}$ пусто, то $\{f < t\} \subset U_t$. Если же $x \in \{f < t\}$, то $f(x) < +\infty$, а потому найдется элемент $s \in T$, удовлетворяющий соотношениям $x \in U_s$ и $s < t$. Итак, $\{f < t\} \subset U_s \subset U_t$. Помимо этого, если $x \in U_t$, то по определению f будет $f(x) \leq t$, т. е. выполнено $U_t \subset \{f \leq t\}$. $\rhd$

3.8.3. *Лемма о сравнении функций, заданных лебеговыми множествами.* *Пусть функции f, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ определены семействами $(U_t)_{t \in T}$ и $(V_t)_{t \in T}$ соответственно:*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \leq t\};$$

$$\{g < t\} \subset V_t \subset \{g \leq t\} \quad (t \in T).$$

Пусть, далее, T *плотно в* $\overline{\mathbb{R}}$ *(т. е.* $(\forall r,\ t \in \overline{\mathbb{R}},\ r < t)\ (\exists s \in T)\ (r < s < t)$*). Неравенство* $f \leq g$ *(в* $\overline{\mathbb{R}}^X$*, т. е.* $f(x) \leq g(x)$ *для* $x \in X$*) имеет место в том и только в том случае, если*

$$t_1,\ t_2 \in T,\ t_1 < t_2 \Rightarrow V_{t_1} \subset U_{t_2}.$$

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Следует из включений

$$V_{t_1} \subset \{g \leq t_1\} \subset \{f \leq t_1\} \subset \{f < t_2\} \subset U_{t_2}.$$

$\Leftarrow$: Пусть $g(x) \neq +\infty$ (иначе заведомо $f(x) \leq g(x)$). Для $t \in \mathbb{R}$ такого, что $g(x) < t < +\infty$, выберем $t_1,\ t_2 \in T$ из условий $g(x) < t_1 < t_2 < t$. Имеем

$$x \in \{g < t_1\} \subset V_{t_1} \subset U_{t_2} \subset \{f \leq t_2\} \subset \{f < t\}.$$

Итак, $f(x) < t$. Из-за произвольности t получаем: $f(x) \leq g(x)$. $\triangleright$

3.8.4. *Следствие.* *Пусть* T *плотно в* $\overline{\mathbb{R}}$ *и семейство* $t \mapsto U_t$ $(t \in T)$ *возрастает. Существует, и притом единственная, функция* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*, для которой*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \leq t\} \quad (t \in T).$$

Для лебеговых множеств f *выполнены соотношения*

$$\{f < t\} = \cup\ \{U_s :\ s < t,\ s \in T\};$$

$$\{f \leq t\} = \cap\{U_r :\ t < r,\ r \in T\} \quad (t \in \overline{\mathbb{R}}).$$

$\triangleleft$ Существование и единственность f обеспечены 3.8.2 и 3.8.3. Если $s < t, s \in T$, то $U_s \subset \{f \leq s\} \subset \{f < t\}$. Если же $f(x) < t$, то в силу плотности T найдется $s \in T$ так, что $f(x) < s < t$. Значит, $f \in \{f < s\} \subset U_s$, что доказывает формулу для $\{f < t\}$. Пусть теперь $r > t,\ r \in T$. Тогда $\{f \leq t\} \subset \{f < r\} \subset U_r$. В свою очередь, если $x \in U_r$ для $r \in T,\ r > t$, то будет выполнено $f(x) \leq r$ для всех $r > t$, откуда $f(x) \leq t$. $\triangleright$

3.8.5. *Пусть X — векторное пространство и S — некоторый конический отрезок в нем. Для $t \in \mathbb{R}$ положим $U_t := \varnothing$, если $t < 0$, и $U_t := tS$ при $t \geq 0$. Отображение $t \mapsto U_t$ $(t \in \mathbb{R})$ возрастающее.*

$\triangleleft$ Если $0 \leq t_1 < t_2$ и $x \in t_1 S$, то $x \in (t_1/t_2)\, t_2 S$. Значит, $x \in t_2 S$. $\triangleright$

3.8.6. Определение. Функционал $p_S : X \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\{p_S < t\} \subset tS \subset \{p_S \leq t\} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

и $\{p < 0\} = \varnothing$, называют *функционалом Минковского* конического отрезка S. (Существование и единственность этого функционала обеспечивают 3.8.2, 3.8.4 и 3.8.5.) Иными словами,

$$p_S(x) = \inf\{t > 0 :\ x \in tS\} \quad (x \in X).$$

3.8.7. *Теорема о функционале Минковского.* *Функционал Минковского конического отрезка сублинеен и принимает положительные значения. Если, в свою очередь, p — некоторый сублинейный функционал с положительными значениями, то множества $\{p < 1\}$ и $\{p \leq 1\}$ суть конические отрезки. При этом p является функционалом Минковского любого конического отрезка S такого, что $\{p < 1\} \subset S \subset \{p \leq 1\}$.*

$\triangleleft$ Пусть S — некоторый конический отрезок и p_S — его функционал Минковского. Пусть $x \in X$. Неравенство $p_S(x) \geq 0$ очевидно. Возьмем $\alpha > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} p_S(\alpha x) = \inf\{t > 0 :\ \alpha x \in tS\} = \inf\left\{t > 0 :\ x \in \frac{t}{\alpha} S\right\} = \\ = \inf\{\alpha\beta > 0 :\ x \in \beta S,\ \beta > 0\} = \\ = \alpha \inf\{\beta > 0 :\ x \in \beta S\} = \alpha p_S(x). \end{aligned}$$

Для проверки субаддитивности p_S возьмем $x_1,\ x_2 \in X$ и, заметив, что для $t_1,\ t_2 > 0$ выполнено $t_1 S + t_2 S \subset (t_1 + t_2) S$ (ибо имеет место тождество

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 = (t_1 + t_2)\left(\frac{t_1}{t_1 + t_2} x_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} x_2\right)\right),$$

последовательно получаем

$$p_S(x_1+x_2) = \inf\{t > 0 :\ x_1+x_2 \in tS\} \leq$$
$$\leq \inf\{t :\ t = t_1+t_2;\ t_1,\ t_2 > 0,\ x_1 \in t_1S,\ x_2 \in t_2S\} =$$
$$= \inf\{t_1 > 0 :\ x_1 \in t_1S\} + \inf\{t_2 > 0 :\ x_2 \in t_2S\} = p_S(x_1) + p_S(x_2).$$

Пусть теперь $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — произвольный сублинейный функционал с положительными значениями. Пусть $\{p < 1\} \subset S \subset \{p \leq 1\}$. Положим $V_t := \{p < t\}, U_t := tS$ для $t \in \mathbb{R}_+$ и $V_t := U_t := \varnothing$ при $t < 0$. Ясно, что

$$\{p_S < t\} \subset U_t \subset \{p_S \leq t\}; \quad \{p < t\} \subset V_t \subset \{p \leq t\}$$

для $t \in \mathbb{R}$. Если $0 \leq t_1 < t_2$, то $V_{t_1} = \{p < t_1\} = t_1\{p < 1\} \subset t_1S = U_{t_1} \subset U_{t_2}$. Кроме того, $U_{t_1} \subset t_1\{p \leq 1\} \subset \{p \leq t_1\} \subset \{p < t_2\} \subset V_{t_2}$. Значит, в силу 3.8.3 и 3.8.4, $p = p_S$. $\triangleright$

3.8.8. Замечание. Конический отрезок S в X является поглощающим множеством в том и только в том случае, если $\operatorname{dom} p_S = X$. Если же известно, что S абсолютно выпукло, то p_S — полунорма. При этом для любой полунормы p множества $\{p < 1\}$ и $\{p \leq 1\}$ являются абсолютно выпуклыми. $\triangleleft\triangleright$

3.8.9. Определение. Подпространство H данного векторного пространства X называют *гиперподпространством*, если X/H изоморфно основному полю. Элементы X/H называют *гиперплоскостями* в X (*параллельными* H). Под *гиперплоскостью* в X понимают аффинное многообразие, параллельное какому-либо гиперподпространству X. При необходимости гиперплоскости в вещественной основе $X_{\mathbb{R}}$ пространства X именуют *вещественными гиперплоскостями* в X.

3.8.10. *Гиперплоскости в X суть в точности множества уровня ненулевых элементов из $X^{\#}$.* $\triangleleft\triangleright$

3.8.11. *Теорема отделимости.* *Пусть X — векторное пространство, U — непустое выпуклое множество в X и L — аффинное многообразие в X. Если $L \cap U = \varnothing$, то найдется гиперплоскость H в X такая, что $H \supset L$ и $H \cap \operatorname{core} U = \varnothing$.*

$\triangleleft$ Не нарушая общности, можно считать, что $\operatorname{core} U \neq \varnothing$ (иначе нечего доказывать) и, более того, что $0 \in \operatorname{core} U$. Возьмем точку $x \in L$ и положим $X_0 := L - x$. Рассмотрим вектор-пространство X/X_0 и соответствующее каноническое отображение $\varphi : X \to X/X_0$. Привлекая 3.1.8 и 3.4.10, видим, что $\varphi(U)$ является поглощающим коническим отрезком. Значит, в силу 3.8.7 и 3.8.8 функционал Минковского $p := p_{\varphi(U)}$ таков, что $\operatorname{dom} p = X/X_0$ и, кроме того,

$$\varphi(\operatorname{core} U) \subset \operatorname{core} \varphi(U) \subset \{p < 1\} \subset \varphi(U).$$

Отсюда, в частности, следует, что $p(\varphi(x)) \geq 1$ либо $\varphi(x) \notin \varphi(U)$.

На основании 3.5.6 имеется функционал $\overline{f}$ из субдифференциала $\partial_x(p \circ \varphi)$. Учитывая теорему Хана — Банаха 3.5.3, выводим

$$\overline{f} \in \partial_x(p \circ \varphi) = \partial_{\varphi(x)}(p) \circ \varphi.$$

Положим $\overline{H} := \{\overline{f} = p \circ \varphi(x)\}$. Ясно, что $\overline{H}$ — это вещественная гиперплоскость в X. То, что $\overline{H} \supset L$, несомненно. Осталось сослаться на 3.5.2 (1), чтобы заключить: $\overline{H} \cap \operatorname{core} U = \varnothing$. Пусть теперь $f := \mathbf{Re}^{-1}\overline{f}$ и $H := \{f = f(x)\}$. Нет сомнений, что $L \subset H \subset \overline{H}$. Таким образом, гиперплоскость H — искомая. $\triangleright$

3.8.12. Замечание. В условиях теоремы отделимости 3.8.11 можно считать, что $\operatorname{core} U \cap L = \varnothing$. Отметим здесь же, что теорему 3.8.11 часто называют *теоремой Хана — Банаха в геометрической форме* или же *теоремой Минковского — Асколи — Мазура*.

3.8.13. Определение. Пусть U, V — множества в X и H — вещественная гиперплоскость в X. Говорят, что H *разделяет* U *и* V, если эти множества лежат в разных полупространствах, определяемых H, т. е. если существует представление $H = \{f \leq t\}$, где $f \in (X_{\mathbb{R}})^{\#}$ и $t \in \mathbb{R}$, для которого $V \subset \{f \leq t\}$ и $U \subset \{f \geq t\} := \{-f \leq -t\}$.

3.8.14. *Теорема отделимости Эйдельгайта.* *Пусть U и V — непустые выпуклые множества, причем ядро V не пусто и не пересекается с U. Тогда найдется вещественная гиперплоскость, разделяющая U и V и не содержащая точек ядра V.* $\triangleleft\triangleright$