Глава 4

Экскурс в метрические пространства

4.1. Равномерность и топология метрического пространства

4.1.1. Определение. Отображение $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ называют *метрикой* на X, если

(1) $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x,\ y) = d(y,\ x)\ (x,\ y \in X)$;

(3) $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y)\ (x,\ y,\ z \in X)$.

Пару $(X,\ d)$ называют *метрическим пространством.* Вещественное число $d(x,\ y)$ обычно именуют *расстоянием* между x и y. Допуская вольность речи, само множество X в этой ситуации также называют метрическим пространством.

4.1.2. *Отображение $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ является метрикой в том и только в том случае, если*

(1) $\{d \leq 0\} = I_X$;

(2) $\{d \leq t\} = \{d \leq t\}^{-1}\ (t \in \mathbb{R}_+)$;

(3) $\{d \leq t_1\} \circ \{d \leq t_2\} \subset \{d \leq t_1 + t_2\}\ (t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}_+)$.

$\lhd$ Свойства 4.1.2 (1)–4.1.2 (3) суть переформулировки 4.1.1 (1)–4.1.1 (3) соответственно. $\rhd$

4.1.3. Определение. Пусть $(X,\ d)$ — метрическое пространство и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$. Множество $B_\varepsilon := B_{d,\varepsilon} := \{d \leq \varepsilon\}$ называют *замкнутым цилиндром* (порядка ε), а множество $\overset{\circ}{B}_\varepsilon := \overset{\circ}{B}_{d,\varepsilon} := \{d < \varepsilon\}$ —

открытым цилиндром (порядка ε). Образ $B_\varepsilon(x)$ точки x при соответствии B_ε называют ***замкнутым шаром*** радиуса ε с центром в x. Аналогично множество $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x)$ называют ***открытым шаром*** радиуса ε с центром x.

4.1.4. *Открытые цилиндры, ра́вно как и замкнутые цилиндры непустого метрического пространства, составляют базисы одного и того же фильтра.* $\triangleleft\triangleright$

4.1.5. Определение. Фильтр, порожденный цилиндрами непустого метрического пространства $(X,\ d)$ в множестве X^2, называют ***метрической равномерностью*** и обозначают $\mathscr{U}_X$, или $\mathscr{U}_d$, или, наконец, просто $\mathscr{U}$, если нет сомнений, о каком пространстве идет речь. При $X := \varnothing$ полагают $\mathscr{U}_X := \{\varnothing\}$. Элементы равномерности $\mathscr{U}_X$ называют ***окружениями*** (***диагонали***).

4.1.6. *Пусть $\mathscr{U}$ — метрическая равномерность. Тогда*

(1) $\mathscr{U} \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$;

(3) $(\forall U \in \mathscr{U})\ (\exists V \in \mathscr{U})\ V \circ V \subset U$;

(4) $\cap\{U :\ U \in \mathscr{U}\} = I_X$. $\triangleleft\triangleright$

4.1.7. Замечание. Свойство 4.1.6 (4), связанное с 4.1.1 (1), часто называют ***хаусдорфовостью*** $\mathscr{U}$.

4.1.8. *Для пространства X с равномерностью $\mathscr{U}_X$ положим*

$$\tau(x) := \{U(x) :\ U \in \mathscr{U}\}.$$

Тогда $\tau(x)$ — фильтр для каждого $x \in X$. При этом

(1) $\tau(x) \subset \operatorname{fil}\{x\}$;

(2) $(\forall U \in \tau(x))\ (\exists V \in \tau(x)\ \&\ V \subset U)\ (\forall y \in V)\ U \in \tau(y)$. $\triangleleft\triangleright$

4.1.9. Определение. Отображение $\tau : x \mapsto \tau(x)$ называют ***метрической топологией***, а элементы $\tau(x)$ — ***окрестностями*** точки x. Для обозначения топологии используют также и более полные обозначения: τ_X, $\tau(\mathscr{U})$ и т. п.

4.1.10. Замечание. Замкнутые шары с центром в некоторой точке составляют базис фильтра окрестностей этой точки. То же верно и для открытых шаров. Отметим еще, что у различных точек в X существуют непересекающиеся окрестности. Это свойство, связанное с 4.1.6 (4), называют *хаусдорфовостью* τ_X.

4.1.11. Определение. Множество G в X называют *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки (символически: $G \in \mathrm{Op}(\tau) \Leftrightarrow ((\forall x \in G)\ G \in \tau(x)))$. Множество F в X называют *замкнутым*, если его дополнение открыто (символически: $F \in \mathrm{Cl}(\tau) \Leftrightarrow (X \setminus F \in \mathrm{Op}(\tau)))$.

4.1.12. *Объединение любого семейства и пересечение конечного семейства открытых множеств суть множества открытые. Пересечение любого семейства и объединение конечного семейства замкнутых множеств суть множества замкнутые.* $\lhd\rhd$

4.1.13. Определение. Для множества U в X полагают

$$\operatorname{int} U := \overset{\circ}{U} := \cup\{G \in \mathrm{Op}(\tau_X) : \ G \subset U\};$$
$$\operatorname{cl} U := \overline{U} := \cap\{F \in \mathrm{Cl}(\tau_X) : \ F \supset U\}.$$

Множество $\operatorname{int} U$ называют *внутренностью* U, а его элементы — *внутренними точками* U. Множество $\operatorname{cl} U$ называют *замыканием* U, а его элементы — *точками прикосновения* U. Внутренность дополнения $X \setminus U$ называют *внешностью* U, а элементы внешности — *внешними точками* U. Точки пространства X, не являющиеся ни внешними, ни внутренними для U, называют *граничными точками* U. Совокупность всех граничных точек U называют *границей* U и обозначают $\operatorname{fr} U$ или ∂U.

4.1.14. *Множество U является окрестностью точки x в том и только в том случае, если x — внутренняя точка U.* $\lhd\rhd$

4.1.15. Замечание. В связи с предложением 4.1.14 множество $\mathrm{Op}(\tau_X)$ также часто называют топологией X, имея в виду, что τ_X однозначно восстанавливается по $\mathrm{Op}(\tau_X)$. Последнее, разумеется, относится и к совокупности $\mathrm{Cl}(\tau_X)$ всех замкнутых множеств в X.

4.1.16. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X. Говорят, что *$\mathscr{B}$ сходится к точке x* из X или что x — это *предел* $\mathscr{B}$ (и пишут: $\mathscr{B} \to x$), если $\operatorname{fil} \mathscr{B}$ тоньше фильтра окрестностей точки x, т. е. $\operatorname{fil} \mathscr{B} \supset \tau(x)$.

4.1.17. Определение. Пусть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это (обобщенная) последовательность в X. Говорят, что рассматриваемая *последовательность сходится к* x (пишут: $x_\xi \to x$), если к x сходится фильтр хвостов этой последовательности. Используют и другие распространенные обозначения и обороты. Например, $x = \lim_\xi x_\xi$ и x — предел (x_ξ), когда ξ пробегает Ξ.

4.1.18. Замечание. Предел фильтра, как и предел обобщенной последовательности, единствен. Этот факт есть другое выражение хаусдорфовости топологии. $\triangleleft\triangleright$

4.1.19. *Для непустого множества U и точки x равносильны следующие утверждения:*

(1) *точка x является точкой прикосновения U;*
(2) *существует фильтр $\mathscr{F}$ такой, что $\mathscr{F} \to x$ и $U \in \mathscr{F}$;*
(3) *существует последовательность $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов U, сходящаяся к точке x.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Так как x не является внешней точкой U, то фильтры $\tau(x)$ и $\mathrm{fil}\,\{U\}$ имеют точную верхнюю границу $\mathscr{F} := \tau(x) \vee \mathrm{fil}\,\{U\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $\mathscr{F} \to x$ и $U \in \mathscr{F}$. Превратим $\mathscr{F}$ в направление с помощью порядка, противоположного порядку по включению. Возьмем $x_V \in V \cap U$ для $V \in \mathscr{F}$. Ясно, что $x_V \to x$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть V — замкнутое множество, $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — последовательность элементов V и $x_\xi \to x$. Достаточно показать, что в этом случае $x \in V$. Последнее очевидно, ибо при $x \in X \setminus V$ хотя бы для одного $\xi \in \Xi$ было бы $x_\xi \in X \setminus V$. $\triangleright$

4.1.20. Замечание. В условиях метрического пространства в 4.1.19 (2) можно считать, что фильтр $\mathscr{F}$ имеет счетный базис, а в 4.1.19 (3) — что $\Xi := \mathbb{N}$. Указанное обстоятельство иногда выражают словами: «метрические пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности».

4.2. Непрерывность и равномерная непрерывность

4.2.1. *Пусть $f : X \to Y$ и τ_X, τ_Y — топологии в X и Y соответственно. Эквивалентны утверждения:*