4.1.17. Определение. Пусть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это (обобщенная) последовательность в X. Говорят, что рассматриваемая *последовательность сходится к* x (пишут: $x_\xi \to x$), если к x сходится фильтр хвостов этой последовательности. Используют и другие распространенные обозначения и обороты. Например, $x = \lim_\xi x_\xi$ и x — предел (x_ξ), когда ξ пробегает Ξ.

4.1.18. Замечание. Предел фильтра, как и предел обобщенной последовательности, единствен. Этот факт есть другое выражение хаусдорфовости топологии. $\triangleleft\triangleright$

4.1.19. *Для непустого множества U и точки x равносильны следующие утверждения:*

(1) *точка x является точкой прикосновения U;*

(2) *существует фильтр $\mathscr{F}$ такой, что $\mathscr{F} \to x$ и $U \in \mathscr{F}$;*

(3) *существует последовательность $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов U, сходящаяся к точке x.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Так как x не является внешней точкой U, то фильтры $\tau(x)$ и $\mathrm{fil}\,\{U\}$ имеют точную верхнюю границу $\mathscr{F} := \tau(x) \vee \mathrm{fil}\,\{U\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $\mathscr{F} \to x$ и $U \in \mathscr{F}$. Превратим $\mathscr{F}$ в направление с помощью порядка, противоположного порядку по включению. Возьмем $x_V \in V \cap U$ для $V \in \mathscr{F}$. Ясно, что $x_V \to x$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть V — замкнутое множество, $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — последовательность элементов V и $x_\xi \to x$. Достаточно показать, что в этом случае $x \in V$. Последнее очевидно, ибо при $x \in X \setminus V$ хотя бы для одного $\xi \in \Xi$ было бы $x_\xi \in X \setminus V$. $\triangleright$

4.1.20. Замечание. В условиях метрического пространства в 4.1.19 (2) можно считать, что фильтр $\mathscr{F}$ имеет счетный базис, а в 4.1.19 (3) — что $\Xi := \mathbb{N}$. Указанное обстоятельство иногда выражают словами: «метрические пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности».

4.2. Непрерывность и равномерная непрерывность

4.2.1. *Пусть $f : X \to Y$ и τ_X, τ_Y — топологии в X и Y соответственно. Эквивалентны утверждения:*

(1) $G \in \mathrm{Op}(\tau_Y) \Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathrm{Op}(\tau_X)$;

(2) $F \in \mathrm{Cl}(\tau_Y) \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathrm{Cl}(\tau_X)$;

(3) $f(\tau_X(x)) \supset \tau_Y(f(x))$ *при всех* $x \in X$;

(4) $(x \in X,\ \mathscr{F} \to x) \Rightarrow (f(\mathscr{F}) \to f(x))$ *для фильтра* $\mathscr{F}$;

(5) $f(x_\xi) \to f(x)$, *каковы бы ни были точка* x *и сходящаяся к ней последовательность* (x_ξ).

$\triangleleft$ Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) вытекает из 4.1.11. Остается проверить, что (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (3): Если $V \in \tau_Y(f(x))$, то $W := \operatorname{int} V \in \mathrm{Op}(\tau_Y)$ и $f(x) \in W$. Отсюда $f^{-1}(W) \in \mathrm{Op}(\tau_X)$ и $x \in f^{-1}(W)$. Иначе говоря, $f^{-1}(W) \in \tau_X(x)$ (см. 4.1.14). Помимо этого, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(W)$ и, следовательно, $f^{-1}(V) \in \tau_X(x)$. Наконец, $V \supset f(f^{-1}(V))$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Если $\mathscr{F} \to x$, то $\mathrm{fil}\,\mathscr{F} \supset \tau_X(x)$ по определению 4.1.16. Привлекая условие, выводим $f(\mathscr{F}) \supset f(\tau_X(x)) \supset \tau_Y(f(x))$. Повторная апелляция к 4.1.16 дает $f(\mathscr{F}) \to f(x)$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Образ фильтра хвостов последовательности $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ при отображении f грубее фильтра хвостов $(f(x_\xi))_{\xi\in\Xi}$.

(5) $\Rightarrow$ (2): Пусть F — замкнутое подмножество в Y. Если $F = \varnothing$, то $f^{-1}(F)$ также пусто, а потому и замкнуто. Пусть F непусто и x — точка прикосновения $f^{-1}(F)$. Рассмотрим последовательность $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ точек из $f^{-1}(F)$, сходящуюся к x (ее существование обеспечено 4.1.18). Тогда $f(x_\xi) \in F$ и $f(x_\xi) \to f(x)$. Вновь применяя 4.1.18, видим, что $f(x) \in F$ и, стало быть, $x \in f^{-1}(F)$. $\triangleright$

4.2.2. Определение. Отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных утверждений 4.2.1 (1)–4.2.1 (5), (как хорошо известно) называют *непрерывным*. Если при этом 4.2.1 (5) выполнено в фиксированной точке $x \in X$, то говорят, что f *непрерывно в точке* x. Стало быть, f непрерывно на X в том и только в том случае, если f непрерывно в каждой точке X.

4.2.3. *Суперпозиция непрерывных отображений непрерывна.*

$\triangleleft$ Следует трижды применить 4.2.1 (5). $\triangleright$

4.2.4. *Пусть* $f : X \to Y$ *и* $\mathscr{U}_X$, $\mathscr{U}_Y$ *— равномерности в* X *и* Y *соответственно. Эквивалентны утверждения:*

(1) $(\forall V \in \mathscr{U}_Y)\ (\exists U \in \mathscr{U}_X)\ (\forall x,\ y)(x,\ y) \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow (f(x),\ f(y)) \in V$;

(2) $(\forall V \in \mathscr{U}_Y)\ f^{-1} \circ V \circ f \in \mathscr{U}_X$;

(3) $f^{\times}(\mathscr{U}_X) \supset \mathscr{U}_Y$, где $f^{\times} : X^2 \to Y$ действует по правилу $f^{\times} : (x,\ y) \mapsto (f(x),\ f(y))$;

(4) $(\forall V \in \mathscr{U}_Y)\ f^{\times -1}(V) \in \mathscr{U}_X$, т. е. $f^{\times -1}(\mathscr{U}_Y) \subset \mathscr{U}_X$.

$\triangleleft$ Достаточно заметить, что по 1.1.10 для $U \subset X^2$ и $V \subset Y^2$ выполнено

$$f^{-1} \circ V \circ f = \bigcup_{(v_1,v_2)\in V} f^{-1}(v_1) \times f^{-1}(v_2) =$$
$$= \{(x,y) \in X^2 :\ (f(x),\ f(y)) \in V\} = f^{\times -1}(V);$$
$$f \circ U \circ f^{-1} = \bigcup_{(u_1,u_2)\in U} f(u_1) \times f(u_2) =$$
$$= \{(f(u_1),\ f(u_2)) :\ (u_1,\ u_2) \in U\} = f^{\times}(U).\ \triangleright$$

4.2.5. Определение. Отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных утверждений 4.2.4 (1)–4.2.4 (4), (как хорошо известно) называют *равномерно непрерывным*.

4.2.6. *Суперпозиция равномерно непрерывных отображений равномерно непрерывна.*

$\triangleleft$ Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и $h := g \circ f : X \to Z$. Ясно, что

$$h^{\times}(x,\ y) = (h(x),\ h(y)) = (g(f(x)),\ g(f(y))) =$$
$$= g^{\times}(f(x),\ f(y)) = g^{\times} \circ f^{\times}(x,\ y)$$

для всех x, y из X. Значит, $h^{\times}(\mathscr{U}_X) = g^{\times}(f^{\times}(\mathscr{U}_X)) \supset g^{\times}(\mathscr{U}_Y) \supset \mathscr{U}_Z$ в силу 4.2.4 (3). Вновь апеллируя к 4.2.4 (3), видим, что h равномерно непрерывно. $\triangleright$

4.2.7. *Равномерно непрерывное отображение непрерывно.* $\triangleleft\triangleright$

4.2.8. Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — множество отображений из X в Y и $\mathscr{U}_X$, $\mathscr{U}_Y$ — соответствующие равномерности. Множество $\mathscr{E}$ называют *равностепенно* (*равномерно*) *непрерывным*, если

$$(\forall V \in \mathscr{U}_Y)\ \bigcap_{f\in\mathscr{E}} f^{-1} \circ V \circ f \in \mathscr{U}_X.$$

4.2.9. *Равностепенно непрерывное множество отображений состоит из равномерно непрерывных отображений. Конечное множество равномерно непрерывных отображений равностепенно непрерывно.* $\triangleleft\triangleright$