4.3. Полунепрерывность

4.3.1. *Пусть* $(X_1,\ d_1)$ *и* $(X_2,\ d_2)$ *— метрические пространства. Пусть, далее,* $\mathscr{X} := X_1 \times X_2$. *Для* $\overline{x} := (x_1,\ x_2)$ *и* $\overline{y} := (y_1,\ y_2)$ *положим*

$$d(\overline{x},\ \overline{y}) := d_1(x_1,\ y_1) + d_2(x_2,\ y_2).$$

Тогда d *— метрика на* $\mathscr{X}$. *При этом для любого* $\overline{x} := (x_1,\ x_2) \in \mathscr{X}$ *справедливо представление*

$$\tau_{\mathscr{X}}(\overline{x}) = \mathrm{fil}\{U_1 \times U_2 :\ U_1 \in \tau_{X_1}(x_1),\ U_2 \in \tau_{X_2}(x_2)\}.\ \lhd\rhd$$

4.3.2. Определение. Топологию $\tau_{\mathscr{X}}$ называют *произведением топологий* τ_{X_1} *и* τ_{X_2} или *топологией произведения* X_1 и X_2 и обозначают $\tau_{X_1} \times \tau_{X_2}$.

4.3.3. Определение. Функцию $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют *полунепрерывной снизу*, если ее надграфик $\operatorname{epi} f$ — замкнутое множество в топологии произведения X и $\mathbb{R}$.

4.3.4. Примеры.

(1) Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу.

(2) Если $f_\xi : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунепрерывная снизу функция для каждого $\xi \in \Xi$, то верхняя огибающая $f(x) := \sup\{f_\xi(x) :\ \xi \in \Xi\}$ $(x \in X)$ также полунепрерывная снизу функция, так как $\operatorname{epi} f = \bigcap_{\xi\in\Xi} \operatorname{epi} f_\xi$.

4.3.5. *Функция* $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ *полунепрерывна снизу в том и только в том случае, если выполнено*

$$x \in X \Rightarrow f(x) = \lim_{y\to x}\inf f(y).$$

Здесь, как обычно,

$$\lim_{y\to x}\inf f(y) := \varliminf_{y\to x} f(y) := \sup_{U\in\tau(x)} \inf f(U)$$

— *нижний предел функции* f *в точке* x (*по фильтру* $\tau(x)$).

$\lhd$ $\Rightarrow$: Если $x \notin \operatorname{dom} f$, то $(x,\ t) \notin \operatorname{epi} f$ для каждого $t \in \mathbb{R}$. Значит, имеется окрестность U_t точки x, где $\inf f(U_t) > t$. Отсюда вытекает: $\lim_{y\to x} \inf f(y) = +\infty = f(x)$. Если же $x \in \operatorname{dom} f$, то $\inf f(V) > -\infty$ для подходящей окрестности V точки x. Выберем $\varepsilon > 0$ и для любой $U \in \tau(x)$, лежащей в V, подыщем точку $x_U \in U$ из условия $\inf f(U) \geq f(x_U) - \varepsilon$. По построению $x_U \in \operatorname{dom} f$ и, кроме того, $x_U \to x$ (при введении естественного порядка в множество окрестностей точки x). Положим $t_U := \inf f(U) + \varepsilon$. Ясно, что $t_U \to t := \lim_{y\to x} \inf f(y) + \varepsilon$. Поскольку $(x_U,\ t_U) \in \operatorname{epi} f$, то $(x,\ t) \in \operatorname{epi} f$ в силу замкнутости надграфика f. Окончательно

$$\lim_{y\to x} \inf f(y) + \varepsilon \geq f(x) \geq \lim_{y\to x} \inf f(y).$$

$\Leftarrow$: Если $(x,\ t) \notin \operatorname{epi} f$, то

$$t < \lim_{y\to x} \inf f(y) = \sup \inf_{U\in\tau(x)} f(U).$$

Таким образом, $\inf f(U) > t$ для некоторой окрестности U точки x.

Отсюда вытекает, что дополнение $(X \times \mathbb{R}) \setminus \operatorname{epi} f$ открыто. $\rhd$

4.3.6. Замечание. Свойство, указанное в предложении 4.3.5, можно принять за основу определения полунепрерывности снизу в точке.

4.3.7. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в том и только в том случае, если f и $-f$ полунепрерывны снизу.* $\lhd\rhd$

4.3.8. *Функция $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ полунепрерывна снизу в том и только в том случае, если для всякого $t \in \mathbb{R}$ замкнуто лебегово множество $\{f \leq t\}$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Если $x \notin \{f \leq t\}$, то $t < f(x)$. На основании 4.3.5 в подходящей окрестности U точки x будет $t < \inf f(U)$. Иначе говоря, дополнение $X \setminus \{f \leq t\}$ открыто.

$\Leftarrow$: Пусть для каких-нибудь $x \in X$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\lim_{y\to x} \inf f(y) \leq t < f(x)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ из условия $t+\varepsilon < f(x)$ и, используя рассуждения доказательства 4.3.5, для $U \in \tau(x)$ найдем точку x_U из $U \cap \{f \leq \inf f(U) + \varepsilon\}$. Бесспорно, $x_U \in \{f \leq t + \varepsilon\}$ и $x_U \to x$. Приходим к противоречию. $\rhd$