4.4. Компактность

4.4.1. Определение. Пусть C — множество в X. Множество C называют *компактным*, если для каждого множества $\mathscr{E} \subset \operatorname{Op}(\tau_X)$ такого, что $C \subset \cup\{G : G \in \mathscr{E}\}$, существует конечное подмножество $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$, удовлетворяющее соотношению $C \subset \cup\{G : G \in \mathscr{E}_0\}$.

4.4.2. Замечание. Определение 4.4.1 часто выражают словами: «множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие».

4.4.3. *Замкнутое подмножество компактного множества является компактным. Компактное множество замкнуто.* $\triangleleft\triangleright$

4.4.4. Замечание. В связи с 4.4.3 используют понятие *относительно компактного множества*, т. е. множества, замыкание которого компактно.

4.4.5. ***Теорема Вейерштрасса.*** *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.*

$\triangleleft$ Прообразы множеств из открытого покрытия образа составляют открытое покрытие исходного множества. $\triangleright$

4.4.6. *Полунепрерывная снизу функция принимает на непустом компактном множестве наименьшее значение (т. е. образ такого множества имеет наименьший элемент).*

$\triangleleft$ Будем считать, что $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ и X компактно. Пусть $t_0 := \inf f(X)$. Если $t_0 = +\infty$, то доказывать нечего. Если же $t_0 < +\infty$, то положим $T := \{t \in \mathbb{R} : t > t_0\}$. Множество $U_t := \{f \le t\}$ для $t \in T$ непусто и замкнуто. Докажем, что $\cap\{U_t : t \in T\}$ непусто (тогда любой элемент x указанного пересечения — искомый: $f(x) = \inf f(X)$).

Предположим противное. Тогда множество $\{G_t := X \setminus U_t : t \in T\}$ образует открытое покрытие X. Выделяя из него конечное подпокрытие $\{G_t : t \in T_0\}$, выводим: $\cap\{U_t : t \in T_0\} = \varnothing$. Последнее соотношение ложно, поскольку $U_{t_1} \cap U_{t_2} = U_{t_1 \wedge t_2}$ при $t_1,\ t_2 \in T$. $\triangleright$

4.4.7. ***Критерий Бурбаки.*** *Пространство является компактным в том и только в том случае, если каждый ультрафильтр в нем сходится* (*ср.* 9.4.4).

4.4.8. *Произведение компактных пространств компактно.*

$\triangleleft$ Достаточно дважды применить критерий Бурбаки. $\triangleright$

4.4.9. *Теорема Кантора.* *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.* $\triangleleft\triangleright$

4.5. Полнота

4.5.1. *Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X. Тогда $\{B^2 : B \in \mathscr{B}\}$ — базис фильтра $\mathscr{B}^\times$ в X^2.*

$\triangleleft$ $(B_1 \times B_1) \cap (B_2 \times B_2) \supset (B_1 \cap B_2) \times (B_1 \cap B_2)$ $\triangleright$

4.5.2. Определение. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X и $\mathscr{U}_X$ — равномерность в X. Фильтр $\mathscr{F}$ называют *фильтром Коши*, если $\mathscr{F}^\times \supset \mathscr{U}_X$. Сеть в X называют *сетью Коши* или *фундаментальной сетью*, если фильтр ее хвостов есть фильтр Коши. Аналогичный смысл вкладывают в термин «*фундаментальная последовательность*».

4.5.3. Замечание. Если V — окружение в X^2, а U — множество в X, то говорят, что U *мало порядка* V, если $U^2 \subset V$. В частности, U мало порядка B_ε в том и только в том случае, если *диаметр* $\operatorname{diam} U := \sup(U^2)$ не больше ε. В связи с указанной терминологией определение фильтра Коши выражают словами: «фильтр является фильтром Коши в том и только в том случае, если он содержит сколь угодно малые множества».

4.5.4. *Для метрического пространства эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *каждый фильтр Коши сходится;*
(2) *каждая сеть Коши имеет предел;*
(3) *любая фундаментальная последовательность сходится.*

$\triangleleft$ Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны, поэтому установим только импликацию (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $U_n \in \mathscr{F}$ — множество, малое порядка $B_{1/n}$. Положим $V_n := U_1 \cap \ldots \cap U_n$ и возьмем $x_n \in V_n$. Имеем, что $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ и $\operatorname{diam} V_n \le 1/n$. Следовательно, (x_n) — фундаментальная последовательность. Значит, есть предел: $x := \lim x_n$. Покажем, что $\mathscr{F} \to x$. Для этого выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ из условия: $d(x_m,\ x) \le 1/2n$ при $m \ge n_0$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ будет $d(x_p,\ y) \le \operatorname{diam} V_p \le 1/2n$ и