4.4.8. *Произведение компактных пространств компактно.*

$\lhd$ Достаточно дважды применить критерий Бурбаки. $\rhd$

4.4.9. *Теорема Кантора.* *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.* $\lhd\rhd$

4.5. Полнота

4.5.1. *Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X. Тогда $\{B^2 :\ B \in \mathscr{B}\}$ — базис фильтра $\mathscr{B}^\times$ в X^2.*

$\lhd$ $(B_1 \times B_1) \cap (B_2 \times B_2) \supset (B_1 \cap B_2) \times (B_1 \cap B_2)$ $\rhd$

4.5.2. Определение. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X и $\mathscr{U}_X$ — равномерность в X. Фильтр $\mathscr{F}$ называют *фильтром Коши*, если $\mathscr{F}^\times \supset \mathscr{U}_X$. Сеть в X называют *сетью Коши* или *фундаментальной сетью*, если фильтр ее хвостов есть фильтр Коши. Аналогичный смысл вкладывают в термин «*фундаментальная последовательность*».

4.5.3. Замечание. Если V — окружение в X^2, а U — множество в X, то говорят, что U *мало порядка* V, если $U^2 \subset V$. В частности, U мало порядка B_ε в том и только в том случае, если *диаметр* $\operatorname{diam} U := \sup(U^2)$ не больше ε. В связи с указанной терминологией определение фильтра Коши выражают словами: «фильтр является фильтром Коши в том и только в том случае, если он содержит сколь угодно малые множества».

4.5.4. *Для метрического пространства эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *каждый фильтр Коши сходится;*
(2) *каждая сеть Коши имеет предел;*
(3) *любая фундаментальная последовательность сходится.*

$\lhd$ Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны, поэтому установим только импликацию (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $U_n \in \mathscr{F}$ — множество, малое порядка $B_{1/n}$. Положим $V_n := U_1 \cap \ldots \cap U_n$ и возьмем $x_n \in V_n$. Имеем, что $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ и $\operatorname{diam} V_n \le 1/n$. Следовательно, (x_n) — фундаментальная последовательность. Значит, есть предел: $x := \lim x_n$. Покажем, что $\mathscr{F} \to x$. Для этого выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ из условия: $d(x_m,\ x) \le 1/2n$ при $m \ge n_0$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ будет $d(x_p,\ y) \le \operatorname{diam} V_p \le 1/2n$ и

$d(x_p,\ x) \le 1/2n$, если только $p := n_0 \vee 2n$ и $y \in V_p$. Отсюда вытекает, что $y \in V_p \Rightarrow d(x,\ y) \le 1/n$, т. е. $V_p \subset B_{1/n}(x)$. Окончательно заключаем: $\mathscr{F} \supset \tau(x)$. $\rhd$

4.5.5. Определение. Метрическое пространство, удовлетворяющее одному (а потому и любому) из эквивалентных утверждений 4.5.4 (1)–4.5.4 (3), (как хорошо известно) называют *полным*.

4.5.6. *Критерий Кантора.* *Метрическое пространство полно в том и только в том случае, если всякое фильтрованное по убыванию непустое семейство его непустых замкнутых подмножеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет общую точку.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Если $\mathscr{B}$ — подобное семейство множеств, то, по определению 1.3.1, $\mathscr{B}$ — базис фильтра. По условию $\mathscr{B}$ — базис фильтра Коши, т. е. существует предел: $\mathscr{B} \to x$. Точка x — искомая.

$\Leftarrow$: Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр Коши. Положим $\mathscr{B} := \{\operatorname{cl} V :\ V \in \mathscr{F}\}$. Диаметры множеств из $\mathscr{B}$ стремятся к нулю. Стало быть, найдется точка x такая, что $x \in \operatorname{cl} V$ при каждом $V \in \mathscr{F}$. Ясно, что $\mathscr{F} \to x$. В самом деле, пусть V — множество из $\mathscr{F}$ малое порядка $\varepsilon/2$ и $y \in V$. Для некоторого $y' \in V$ будет $d(x,\ y') \le \varepsilon/2$ и, значит, $d(x,\ y) \le d(x,\ y') + d(y',\ y) \le \varepsilon$, т. е., следовательно, $V \subset B_\varepsilon(x)$ и, значит, $B_\varepsilon(x) \in \mathscr{F}$. $\rhd$

4.5.7. *Метрическое пространство полно в том и только в том случае, если любая последовательность вложенных шаров $B_{\varepsilon_1}(x_1) \supset \ldots \supset B_{\varepsilon_n}(x_n) \supset B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \supset \ldots$, радиусы (ε_n) которых стремятся к нулю, имеет общую точку.* $\lhd\rhd$

4.5.8. *Образ фильтра Коши при равномерно непрерывном отображении — фильтр Коши.*

$\lhd$ Пусть отображение f действует из пространства X с равномерностью $\mathscr{U}_X$ в пространство Y с равномерностью $\mathscr{U}_Y$. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — фильтр Коши в X. Если $V \in \mathscr{U}_Y$, то $f^{-1} \circ V \circ f \in \mathscr{U}_X$ по определению 4.2.5 (см. 4.2.4 (2)). Поскольку $\mathscr{F}$ — фильтр Коши, то при подходящем $U \in \mathscr{F}$ будет $U^2 \subset f^{-1} \circ V \circ f$. Оказывается, что $f(U)$ мало порядка V. В самом деле,

$$f(U)^2 = \bigcup_{(u_1,u_2) \in U^2} f(u_1) \times f(u_2) =$$

$$= f \circ U^2 \circ f^{-1} \subset f \circ (f^{-1} \circ V \circ f) \circ f^{-1} = (f \circ f^{-1}) \circ V \circ (f \circ f^{-1}) \subset U,$$

ибо, на основании 1.1.6, $f \circ f^{-1} = I_{\operatorname{im} f} \subset I_Y$. $\rhd$

4.5.9. *Произведение полных пространств — полно.*

$\lhd$ Следует применить 4.5.8 и 4.5.4. $\rhd$

4.5.10. *Пусть X_0 плотно в X (т. е. $\operatorname{cl} X_0 = X$) и $f_0 : X_0 \to Y$ — равномерно непрерывное отображение из X_0 в полное пространство Y. Тогда существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение $f : X \to Y$, продолжающее f_0, т. е. такое, что $f|_{X_0} = f_0$.*

$\lhd$ Для $x \in X$ фильтр $\mathscr{F}_x := \{U \cap X_0 :\ U \in \tau_X(x)\}$ является фильтром Коши в X_0. Стало быть, из 4.5.8 можно вывести, что $f_0(\mathscr{F}_X)$ — фильтр Коши в Y. В силу полноты Y существует предел $y \in Y$, т. е. $f_0(\mathscr{F}_x) \to y$. Более того, этот предел единствен (ср. 4.1.18). Полагаем $f(x) := y$. Остается провести несложную проверку равномерной непрерывности отображения f. $\rhd$

4.5.11. Определение. Отображение $f : (X,\ d) \to (\widehat{X},\ \widehat{d})$ называют ***изометрией*** X ***в*** $\widehat{X}$ (или ***изометрическим вложением***), если $d = \widehat{d} \circ f^{\times}$. Отображение f называют ***изометрией*** X ***на*** $\widehat{X}$ (короче, ***изометрией***), если f — изометрия X в $\widehat{X}$ и, кроме того, $\operatorname{im} f = \widehat{X}$.

4.5.12. *Теорема Хаусдорфа о пополнении.* *Пусть $(X,\ d)$ — метрическое пространство. Тогда существуют полное метрическое пространство $(\widehat{X},\ \widehat{d})$ и изометрия $\iota : (X,\ d) \to (\widehat{X},\ \widehat{d})$ на плотное подпространство в $(\widehat{X},\ \widehat{d})$. Пространство $(\widehat{X},\ \widehat{d})$ единственно с точностью до изометрии в том смысле, что любая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & (\widehat{X},\widehat{d}) \arrow[d, "\Psi"] \\
& (\widehat{X}_1,\widehat{d}_1)
\end{tikzcd}$$

где $\iota_1 : (X,\ d) \to (\widehat{X}_1,\ \widehat{d}_1)$ — изометрия X на плотное подпространство полного пространства $(\widehat{X}_1,\ \widehat{d}_1)$, достраивается до коммутативной диаграммы с помощью изометрии $\Psi : (\widehat{X},\ \widehat{d}) \to (\widehat{X}_1,\ \widehat{d}_1)$ пространства $\widehat{X}$ и пространства $\widehat{X}_1$.

$\lhd$ Единственность с точностью до изометрии вытекает из 4.5.10. В самом деле, пусть $\Psi_0 := \iota_1 \circ \iota^{-1}$. Тогда Ψ_0 — изометрия плотного подпространства $\iota(X)$ в $\widehat{X}$ на плотное подпространство $\iota_1(X)$ в $\widehat{X}_1$.

Возьмем в качестве Ψ единственное продолжение Ψ_0 на $\widehat{X}$. Следует проверить только, что Ψ действует на $\widehat{X}_1$. Выберем $\widehat{x}_1$ из $\widehat{X}_1$. Этот элемент есть предел последовательности $(\iota_1(x_n))$, где $x_n \in X$. Понятно, что (x_n) фундаментальная. Стало быть, фундаментальна последовательность $(\iota(x_n))$ в $\widehat{X}$. Пусть $\widehat{x} := \lim \iota(x_n)$, $\widehat{x} \in \widehat{X}$. При этом $\Psi(\widehat{x}) = \lim \Psi_0(\iota(x_n)) = \lim \iota_1 \circ \iota^{-1}(\iota(x_n)) = \lim \iota_1(x_n) = \widehat{x}_1$.

Наметим теперь схему доказательства существования $\widehat{X}$. Рассмотрим множество $\mathscr{X}$ всех фундаментальных последовательностей в пространстве X. Определим в $\mathscr{X}$ отношение эквивалентности так: $\overline{x}_1 \sim \overline{x}_2 \Leftrightarrow d(\overline{x}_1(n),\ \overline{x}_2(n)) \to 0$. Пусть $\widehat{X} := \mathscr{X}/\!\sim$ и $\widehat{d}(\varphi(\overline{x}_1), \varphi(\overline{x}_2)) := \lim d(\overline{x}_1(n), \overline{x}_2(n))$, где $\varphi : \mathscr{X} \to \widehat{X}$ — каноническое отображение. Изометрия $\iota : (X,\ d) \to (\widehat{X},\ \widehat{d})$ строится так: $\iota(x) := \varphi(n \mapsto x\ (n \in \mathbb{N}))$. $\triangleright$

4.5.13. Определение. Пространство $(\widehat{X},\ \widehat{d})$, фигурирующее в 4.5.12, ра́вно как и любое изометричное ему пространство, называют *пополнением* пространства $(X,\ d)$.

4.5.14. Определение. Множество X_0 в $(X,\ d)$ называют *полным*, если полным является пространство $(X_0,\ d|_{X_0^2})$ — подпространство $(X,\ d)$.

4.5.15. *Замкнутое подмножество полного пространства является полным. Полное множество замкнуто.* $\triangleleft\triangleright$

4.5.16. *Пусть X_0 — подпространство некоторого полного метрического пространства X. Тогда пополнение X_0 изометрично замыканию X_0 в X.*

$\triangleleft$ Пусть $\widehat{X} := \operatorname{cl} X_0$ и $\iota : X_0 \to \widehat{X}$ — тождественное вложение. Ясно, что ι — изометрия на плотное подпространство. При этом $\widehat{X}$ полно в силу 4.5.15. Осталось сослаться на 4.5.12. $\triangleright$

4.6. Компактность и полнота

4.6.1. *Компактное пространство полно.* $\triangleleft\triangleright$

4.6.2. Определение. Пусть U — множество в X и $V \in \mathscr{U}_X$. Множество E в X называют *V-сетью* для U, если $U \subset V(E)$.

4.6.3. Определение. Множество называют *вполне ограниченным*, если для каждого V из $\mathscr{U}_X$ у него имеется конечная V-сеть.