Возьмем в качестве Ψ единственное продолжение Ψ_0 на $\widehat{X}$. Следует проверить только, что Ψ действует на $\widehat{X}_1$. Выберем $\widehat{x}_1$ из $\widehat{X}_1$. Этот элемент есть предел последовательности $(\iota_1(x_n))$, где $x_n \in X$. Понятно, что (x_n) фундаментальная. Стало быть, фундаментальна последовательность $(\iota(x_n))$ в $\widehat{X}$. Пусть $\widehat{x} := \lim \iota(x_n)$, $\widehat{x} \in \widehat{X}$. При этом $\Psi(\widehat{x}) = \lim \Psi_0(\iota(x_n)) = \lim \iota_1 \circ \iota^{-1}(\iota(x_n)) = \lim \iota_1(x_n) = \widehat{x}_1$.

Наметим теперь схему доказательства существования $\widehat{X}$. Рассмотрим множество $\mathscr{X}$ всех фундаментальных последовательностей в пространстве X. Определим в $\mathscr{X}$ отношение эквивалентности так: $\overline{x}_1 \sim \overline{x}_2 \Leftrightarrow d(\overline{x}_1(n),\ \overline{x}_2(n)) \to 0$. Пусть $\widehat{X} := \mathscr{X}/\!\sim$ и $\widehat{d}(\varphi(\overline{x}_1), \varphi(\overline{x}_2)) := \lim d(\overline{x}_1(n), \overline{x}_2(n))$, где $\varphi : \mathscr{X} \to \widehat{X}$ — каноническое отображение. Изометрия $\iota : (X,\ d) \to (\widehat{X},\ \widehat{d})$ строится так: $\iota(x) := \varphi(n \mapsto x\ (n \in \mathbb{N}))$. $\rhd$

4.5.13. Определение. Пространство $(\widehat{X},\ \widehat{d})$, фигурирующее в 4.5.12, ра́вно как и любое изометричное ему пространство, называют *пополнением* пространства $(X,\ d)$.

4.5.14. Определение. Множество X_0 в $(X,\ d)$ называют *полным*, если полным является пространство $(X_0,\ d|_{X_0^2})$ — подпространство $(X,\ d)$.

4.5.15. *Замкнутое подмножество полного пространства является полным. Полное множество замкнуто.* $\lhd\rhd$

4.5.16. *Пусть X_0 — подпространство некоторого полного метрического пространства X. Тогда пополнение X_0 изометрично замыканию X_0 в X.*

$\lhd$ Пусть $\widehat{X} := \operatorname{cl} X_0$ и $\iota : X_0 \to \widehat{X}$ — тождественное вложение. Ясно, что ι — изометрия на плотное подпространство. При этом $\widehat{X}$ полно в силу 4.5.15. Осталось сослаться на 4.5.12. $\rhd$

4.6. Компактность и полнота

4.6.1. *Компактное пространство полно.* $\lhd\rhd$

4.6.2. Определение. Пусть U — множество в X и $V \in \mathscr{U}_X$. Множество E в X называют *V-сетью* для U, если $U \subset V(E)$.

4.6.3. Определение. Множество называют *вполне ограниченным*, если для каждого V из $\mathscr{U}_X$ у него имеется конечная V-сеть.

4.6.4. *Если для любого V из $\mathscr{U}_X$ у множества U в X есть вполне ограниченная V-сеть, то U — вполне ограниченное множество.*

◁ Пусть $V \in \mathscr{U}_X$ и $W \in \mathscr{U}_X$ таково, что $W \circ W \subset V$. Возьмем вполне ограниченную W-сеть F для U, т. е. $U \subset W(F)$. Поскольку F вполне ограничено, то найдется конечная W-сеть E для F, т. е. $F \subset W(E)$. Окончательно

$$U \subset W(F) \subset W(W(E)) = W \circ W(E) \subset V(E),$$

т. е. E — конечная V-сеть для U. ▷

4.6.5. *Множество U в X является вполне ограниченным в том и только в том случае, если для всякого V из $\mathscr{U}_X$ найдется конечное семейство $U_1, \dots, U_n$ подмножеств U такое, что $U = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ и каждое из множеств $U_1, \dots, U_n$ мало порядка V.* ◁▷

4.6.6. Замечание. Факт, отмеченный 4.6.5, выражают словами: «множество вполне ограничено тогда и только тогда, когда у него есть конечные покрытия сколь угодно малыми множествами».

4.6.7. *Критерий Хаусдорфа.* *Множество является компактным тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено.* ◁▷

4.6.8. *Пусть $C(X,\ \mathbb{F})$ — пространство непрерывных функций на компакте X со значениями в основном поле $\mathbb{F}$ и с метрикой Чебышёва*

$$d(f,\ g) := \sup_{x \in X} d_{\mathbb{F}}(f(x),\ g(x)) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \quad (f,\ g \in C(X,\ \mathbb{F})).$$

Для $\theta \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}$ положим

$$U_\theta := \left\{(f,\ g) \in C(X,\ \mathbb{F})^2 :\ g \circ f^{-1} \subset \theta\right\}.$$

Тогда $\mathscr{U}_d = \operatorname{fil}\{U_\theta :\ \theta \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}\}$. ◁▷

4.6.9. *Пространство $C(X,\ \mathbb{F})$ полно.* ◁▷

4.6.10. *Теорема Асколи — Арцела.* *Множество $\mathscr{E}$ в $C(X,\ \mathbb{F})$ относительно компактно в том и только в том случае, если $\mathscr{E}$ равностепенно непрерывно и множество $\cup\{g(X) :\ g \in \mathscr{E}\}$ вполне ограничено в пространстве $\mathbb{F}$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: То, что $\cup\{g(X) : \ g \in \mathscr{E}\}$ — это вполне ограниченное множество, не вызывает сомнений. Для проверки равностепенной непрерывности $\mathscr{E}$ возьмем $\theta \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}$ и подберем симметричное окружение θ' из условия $\theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta$. По критерию Хаусдорфа найдется конечная $U_{\theta'}$-сеть $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{E}$. Рассмотрим окружение $U \in \mathscr{U}_X$, заданное соотношением

$$U := \bigcap_{f \in \mathscr{E}'} f^{-1} \circ \theta' \circ f$$

(ср. 4.2.9). Для произвольных $g \in \mathscr{E}$ и $f \in \mathscr{E}'$ таких, что $g \circ f^{-1} \subset \theta'$, выполнено

$$\theta' = \theta'^{-1} \supset (g \circ f^{-1})^{-1} = (f^{-1})^{-1} \circ g^{-1} = f \circ g^{-1}.$$

Помимо этого, из свойств композиции соответствий и из 4.6.8 вытекает

$$g^{\times}(U) = g \circ U \circ g^{-1} \subset g \circ (f^{-1} \circ \theta' \circ f) \circ g^{-1} \subset$$
$$\subset (g \circ f^{-1}) \circ \theta' \circ (f \circ g^{-1}) \subset \theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta.$$

Вместе с произвольностью g последнее означает, что $\mathscr{E}$ равностепенно непрерывно.

$\Leftarrow$: На основании 4.5.15, 4.6.7, 4.6.8 и 4.6.9 достаточно для каждого $\theta \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}$ построить конечную U_θ-сеть в $\mathscr{E}$. Подыщем $\theta' \in \mathscr{U}_{\mathbb{F}}$, для которого $\theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta$, и найдем открытое симметричное окружение $U \in \mathscr{U}_X$, чтобы было

$$U \subset \bigcap_{g \in \mathscr{E}} g^{-1} \circ \theta' \circ g$$

(существование U обеспечено равностепенной непрерывностью $\mathscr{E}$).

Ясно, что семейство $\{U(x) : \ x \in X\}$ образует открытое покрытие X. Используя компактность X, укажем конечное подпокрытие $\{U(x_0) : \ x_0 \in X_0\}$. В частности, с учетом 1.1.10

$$I_X \subset \bigcup_{x_0 \in X_0} U(x_0) \times U(x_0) =$$

$$= \bigcup_{(x_0, x_0) \in I_{X_0}} U^{-1}(x_0) \times U(x_0) = U \circ I_{X_0} \circ U.$$

Множество $\{g|_{X_0} : \ g \in \mathscr{E}\}$ вполне ограничено в $\mathbb{F}^{X_0}$. Стало быть, в этом множестве есть конечная θ'-сеть. Точнее говоря, имеется конечное множество $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{E}$, обладающее тем свойством, что для каждого $g \in \mathscr{E}$ при подходящем $f \in \mathscr{E}'$ справедливо

$$g \circ I_{X_0} \circ f^{-1} \subset \theta'.$$

Применяя полученные оценки, последовательно выводим

$$g \circ f^{-1} = g \circ I_X \circ f^{-1} \subset g \circ (U \circ I_{X_0} \circ U) \circ f^{-1} \subset$$

$$\subset g \circ (g^{-1} \circ \theta' \circ g) \circ I_{X_0} \circ (f^{-1} \circ \theta' \circ f) \circ f^{-1} =$$

$$= (g \circ g^{-1}) \circ \theta' \circ (g \circ I_{X_0} \circ f^{-1}) \circ \theta' \circ (f \circ f^{-1}) =$$

$$= I_{\operatorname{im} g} \circ \theta' \circ (g \circ I_{X_0} \circ f^{-1}) \circ \theta' \circ I_{\operatorname{im} f} \subset$$

$$\subset \theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta.$$

Таким образом, в силу 4.6.8, $\mathscr{E}'$ — это конечная U_θ-сеть для $\mathscr{E}$. $\triangleright$

4.6.11. Замечание. Полезным утверждением является перевод доказательства теоремы Асколи — Арцела на язык «ε-δ». Вот необходимый словарь: «θ, U_θ — это ε», «θ' — это $\varepsilon/3$», а «δ — это U». Столь же полезно (и поучительно) найти обобщения теоремы Асколи — Арцела для отображений, действующих в произвольные пространства.

4.7. Бэровские пространства

4.7.1. Определение. Множество U принято называть *разреженным* или *нигде не плотным*, если в его замыкании нет внутренних точек, т. е. $\operatorname{int}\operatorname{cl} U = \varnothing$. Множество U называют *тощим* (или *множеством первой категории*), если U содержится в объединении (не более чем) счетного числа разреженных множеств, т. е. $U \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $\operatorname{int}\operatorname{cl} U_n = \varnothing$. *Нетощие* множества, т. е. множества, не являющиеся тощими, называют также *множествами второй категории*.

4.7.2. Определение. Пространство называют *бэровским*, если любое его непустое открытое множество нетощее.