Множество $\{g|_{X_0} : \ g \in \mathscr{E}\}$ вполне ограничено в $\mathbb{F}^{X_0}$. Стало быть, в этом множестве есть конечная θ'-сеть. Точнее говоря, имеется конечное множество $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{E}$, обладающее тем свойством, что для каждого $g \in \mathscr{E}$ при подходящем $f \in \mathscr{E}'$ справедливо

$$g \circ I_{X_0} \circ f^{-1} \subset \theta'.$$

Применяя полученные оценки, последовательно выводим

$$g \circ f^{-1} = g \circ I_X \circ f^{-1} \subset g \circ (U \circ I_{X_0} \circ U) \circ f^{-1} \subset$$

$$\subset g \circ (g^{-1} \circ \theta' \circ g) \circ I_{X_0} \circ (f^{-1} \circ \theta' \circ f) \circ f^{-1} =$$

$$= (g \circ g^{-1}) \circ \theta' \circ (g \circ I_{X_0} \circ f^{-1}) \circ \theta' \circ (f \circ f^{-1}) =$$

$$= I_{\operatorname{im} g} \circ \theta' \circ (g \circ I_{X_0} \circ f^{-1}) \circ \theta' \circ I_{\operatorname{im} f} \subset$$

$$\subset \theta' \circ \theta' \circ \theta' \subset \theta.$$

Таким образом, в силу 4.6.8, $\mathscr{E}'$ — это конечная U_θ-сеть для $\mathscr{E}$. $\rhd$

4.6.11. Замечание. Полезным утверждением является перевод доказательства теоремы Асколи — Арцела на язык «ε-δ». Вот необходимый словарь: «θ, U_θ — это ε», «θ' — это $\varepsilon/3$», а «δ — это U». Столь же полезно (и поучительно) найти обобщения теоремы Асколи — Арцела для отображений, действующих в произвольные пространства.

4.7. Бэровские пространства

4.7.1. Определение. Множество U принято называть *разреженным* или *нигде не плотным*, если в его замыкании нет внутренних точек, т. е. $\operatorname{int}\operatorname{cl} U = \varnothing$. Множество U называют *тощим* (или *множеством первой категории*), если U содержится в объединении (не более чем) счетного числа разреженных множеств, т. е. $U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $\operatorname{int}\operatorname{cl} U_n = \varnothing$. *Нетощие* множества, т. е. множества, не являющиеся тощими, называют также *множествами второй категории*.

4.7.2. Определение. Пространство называют *бэровским*, если любое его непустое открытое множество нетощее.

4.7.3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) X *— бэровское пространство;*

(2) *объединение счетного числа замкнутых разреженных множеств не имеет внутренних точек;*

(3) *пересечение счетного числа любых всюду плотных (т. е. плотных в* X*) открытых множеств является всюду плотным;*

(4) *дополнение любого тощего множества всюду плотно.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $U := \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $U_n = \operatorname{cl} U_n$, причем $\operatorname{int} U_n = \varnothing$. Тогда U — тощее множество. Так как $\operatorname{int} U \subset U$ и $\operatorname{int} U$ — открытое множество, то $\operatorname{int} U$, являясь тощим множеством, обязательно пусто в силу бэровости X.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $U := \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, где G_n открыто и $\operatorname{cl} G_n = X$. Тогда $X\setminus U = X\setminus \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} (X\setminus G_n)$. При этом $X\setminus G_n$ замкнуто и $\operatorname{int}(X \setminus G_n) = \varnothing$ (ибо $\operatorname{cl} G_n = X$). Стало быть, $\operatorname{int}(X \setminus U) = \varnothing$. Последнее означает, что у U пустая внешность, т. е. U всюду плотно.

(3) $\Rightarrow$ (4): Пусть U тощее в X, т. е. $U \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ и $\operatorname{int}\operatorname{cl} U_n = \varnothing$. Можно считать, что $U_n = \operatorname{cl} U_n$. Тогда $G_n := X \setminus U_n$ открыто и всюду плотно. По условию $\cap_{n\in\mathbb{N}} G_n = X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ всюду плотно. При этом указанное множество содержится в $X \setminus U$ и, значит, множество $X \setminus U$ всюду плотно.

(4) $\Rightarrow$ (1): Если U — непустое открытое множество в X, то $X \setminus U$ не является всюду плотным. Следовательно, U нетощее. $\rhd$

4.7.4. Замечание. В связи с 4.7.3 (4) отметим, что дополнения тощих множеств (иногда) называют ***вычетами*** или ***остаточными множествами***. Вычеты в бэровском пространстве — нетощие множества.

4.7.5. Теорема Осгуда. *Пусть* X *— бэровское пространство и* $(f_\xi : X \to \mathbb{R})_{\xi\in\Xi}$ *— семейство полунепрерывных снизу функций, причем* $\sup\{f_\xi(x) :\ \xi \in \Xi\} < +\infty$ *для каждого* $x \in X$. *Тогда всякое непустое открытое множество* G *в* X *содержит непустое открытое подмножество* G_0*, на котором семейство* $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *равномерно ограничено сверху, т. е. выполнено* $\sup_{x\in G_0} \sup\ \{f_\xi(x) :\ \xi \in \Xi\} \leq +\infty$. $\lhd\rhd$

4.7.6. Теорема Бэра. *Полное метрическое пространство — бэровское.*

$\lhd$ Пусть G — непустое открытое множество и $x_0 \in G$. Допустим, что G тощее, т. е. $G \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, где $\operatorname{int} U_n = \varnothing$ и $U_n = \operatorname{cl} U_n$. Найдем

$\varepsilon_0 > 0$ из условия $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset G$. Ясно, что U_1 не содержит целиком шар $B_{\varepsilon_0/2}(x_0)$, т. е. имеется $x_1 \in B_{\varepsilon_0/2}(x_0) \setminus U_1$. В силу замкнутости U_1 можно подыскать ε_1 так, что $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0/2$ и $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap U_1 = \varnothing$. Проверим, что $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset B_{\varepsilon_0}(x_0)$. Действительно, если $d(x_1,\ y_1) \le \varepsilon_1$, то $d(y_1,\ x_0) \le d(y_1,\ x_1) + d(x_1,\ x_0) \le \varepsilon_1 + \varepsilon_0/2$, ибо $d(x_1,\ x_0) \le \varepsilon_0/2$. Шар $B_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ не лежит целиком в U_2. Поэтому существуют $x_2 \in B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \setminus U_2$ и $0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1/2$ такие, что $B_{\varepsilon_2}(x_2) \cap U_2 = \varnothing$. Видно, что вновь $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1)$. Продолжая начатый процесс по индукции, получим последовательность шаров $B_{\varepsilon_0}(x_0) \supset B_{\varepsilon_1}(x_1) \supset B_{\varepsilon_2}(x_2) \supset \dots$, причем $\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n/2$ и $B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap U_n = \varnothing$. На основании 4.5.6 у построенных шаров есть общая точка $x := \lim x_n$. При этом, конечно же, $x \neq \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ и, стало быть, $x \notin G$. С другой стороны, $x \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset G$. Получили противоречие. $\triangleright$

4.7.7. Замечание. Теорему Бэра часто используют как «чистую теорему существования».

В качестве классической иллюстрации рассмотрим вопрос о существовании непрерывных нигде не дифференцируемых функций. Для $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и $x \in [0,1)$ положим

$$D_+ f(x) := \liminf_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$D^+ f(x) := \limsup_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Элементы $D_+ f(x)$ и $D^+ f(x)$ из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ называют ***нижней правой*** и соответственно ***верхней правой производной Дини*** функции f в точке x.

Пусть D — это множество таких функций $f \in C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$, что для некоторой точки $x \in [0,\ 1)$ элементы $D_+ f(x)$ и $D^+ f(x)$ входят в $\mathbb{R}$, т. е. конечны. Тогда D — тощее множество. Значит, функции, не имеющие производной ни в одной точке из $(0,\ 1)$, всюду плотны в $C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$. В то же время конкретные примеры таких функций дались не просто. Вот наиболее известные из них:

$$\text{\textit{функция Ван дер Вардена}} \ — \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle\langle 4^n x\rangle\rangle}{4^n}$$

(здесь $\langle\langle x\rangle\rangle := (x-[x]) \wedge (1+[x]-x)$ — расстояние до ближайшего к x целого числа),

$$\textit{функция Римана} \ - \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\,(n^2\pi x)$$

и, наконец, исторически первая

$$\textit{функция Вейерштрасса} \ - \ \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\,(a^n\pi x)$$

(здесь a — нечетное положительное целое, $0 < b < 1$ и $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$).

4.8. Теорема Жордана и простые картины

4.8.1. Замечание. В топологии, в частности, устанавливают глубокие и тонкие факты о метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$. Ниже приведены используемые в дальнейшем те из этих фактов, роль которых известна, например, из комплексного анализа.

4.8.2. Определение. Гомеоморфный (= взаимно однозначный и взаимно непрерывный) образ отрезка называют (*жордановой*) *дугой*. Гомеоморфный образ окружности называют *простой* (*жордановой*) *петлей*. Естественный смысл вкладывают в понятия типа «гладкая дуга» и т. п.

4.8.3. *Теорема Жордана.* *Пусть γ — простая петля в плоскости $\mathbb{R}^2$. Существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 такие, что*

$$G_1 \cup G_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma;\ \ \gamma = \partial G_1 = \partial G_2. \ \lhd\rhd$$

4.8.4. Замечание. Одно из множеств G_1 и G_2, фигурирующих в 4.8.3, ограничено. Помимо этого, каждое из них *связно*, т. е. непредставимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств. В этой связи теорему Жордана часто выражают так: «простая петля разрезает плоскость на две области и является их общей границей».