(здесь $\langle\langle x\rangle\rangle := (x-[x]) \wedge (1+[x]-x)$ — расстояние до ближайшего к x целого числа),

$$\textit{функция Римана} \ — \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\,(n^2\pi x)$$

и, наконец, исторически первая

$$\textit{функция Вейерштрасса} \ — \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\,(a^n\pi x)$$

(здесь a — нечетное положительное целое, $0 < b < 1$ и $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$).

4.8. Теорема Жордана и простые картины

4.8.1. Замечание. В топологии, в частности, устанавливают глубокие и тонкие факты о метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$. Ниже приведены используемые в дальнейшем те из этих фактов, роль которых известна, например, из комплексного анализа.

4.8.2. Определение. Гомеоморфный (= взаимно однозначный и взаимно непрерывный) образ отрезка называют (*жордановой*) *дугой*. Гомеоморфный образ окружности называют *простой* (*жордановой*) *петлей*. Естественный смысл вкладывают в понятия типа «гладкая дуга» и т. п.

4.8.3. *Теорема Жордана.* *Пусть γ — простая петля в плоскости $\mathbb{R}^2$. Существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 такие, что*

$$G_1 \cup G_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma;\ \ \gamma = \partial G_1 = \partial G_2.\ \ \triangleleft\triangleright$$

4.8.4. Замечание. Одно из множеств G_1 и G_2, фигурирующих в 4.8.3, ограничено. Помимо этого, каждое из них *связно*, т. е. непредставимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств. В этой связи теорему Жордана часто выражают так: «простая петля разрезает плоскость на две области и является их общей границей».

4.8.5. Определение. Пусть $D,\ D_1,\dots,D_n$ — замкнутые круги (= замкнутые шары) на плоскости, причем $D_m \cap D_k = \varnothing$ при $m \neq k$ и $D_1,\dots,D_n \subset \operatorname{int} D$. Множество

$$D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{int} D_k$$

называют *резным диском*. Всякое множество в плоскости, диффеоморфное (= «гладко гомеоморфное») некоторому резному диску, называют *связным элементарным компактом*. Объединение непустого конечного семейства попарно не пересекающихся связных элементарных компактов называют *элементарным компактом*.

4.8.6. Замечание. Граница ∂F элементарного компакта F состоит из конечного числа непересекающихся гладких простых петель. При этом вложение F в (ориентированную) плоскость $\mathbb{R}^2$ индуцирует в F структуру (ориентированного) многообразия с (ориентированным) краем ∂F. Отметим здесь же, что в силу 4.8.3 имеет смысл говорить о положительной ориентации гладкой петли, подразумевая ориентацию края компактной части плоскости, ограниченной этой петлей.

4.8.7. *Пусть K — компактное подмножество плоскости и G — непустое открытое множество, содержащее K. Тогда существует элементарный компакт F такой, что*

$$K \subset \operatorname{int} F \subset F \subset G. \quad \lhd\rhd$$

4.8.8. Определение. Множество F, наличие которого отмечено в 4.8.7, называют *простой картиной* для пары $(K,\ G)$.

Упражнения

4.1. Привести примеры метрических пространств. Выяснить, какими способами можно получать новые метрические пространства.

4.2. Каким должен быть фильтр в X^2, совпадающий с некоторой метрической равномерностью в X?

4.3. Пусть S — пространство измеримых функций на $[0,\ 1]$ с метрикой

$$d(f,\ g) := \int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\,dt \quad (f,\ g \in S)$$

(подразумевается некоторая естественная факторизация — какая именно?). Выяснить смысл сходимости в этом пространстве.