Глава 5

Мультинормированные и банаховы пространства

5.1. Полунормы и мультинормы

5.1.1. *Пусть X — векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$ и $p : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма. Тогда*

(1) $\operatorname{dom} p$ *— подпространство в X;*

(2) $p(x) \geq 0$ *для всех $x \in X$;*

(3) *ядро полунормы* $\ker p := \{p = 0\}$ *— подпространство X;*

(4) *множества $\overset{\circ}{B}_p := \{p < 1\}$ и $B_p := \{p \leq 1\}$ абсолютно выпуклые, причем p является функционалом Минковского любого абсолютно выпуклого множества B такого, что $\overset{\circ}{B}_p \subset B \subset B_p$;*

(5) *$X = \operatorname{dom} p$ в том и только в том случае, если $\overset{\circ}{B}_p$ — поглощающее множество.*

$\triangleleft$ Если $x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} p$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{F}$, то ввиду 3.7.6 имеем

$$p(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq |\alpha_1| p(x_1) + |\alpha_2| p(x_2) < +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

Значит, (1) верно. Допустим, что (2) не верно, т. е. для некоторого $x \in X$ справедливо $p(x) < 0$. Тогда $0 \leq p(x) + p(-x) < p(-x) = p(x) < 0$. Получается противоречие. Утверждение (3) немедленно следует из (2) и субаддитивности p. Справедливость (4) и (5) частично уже отмечалась (ср. 3.8.8). Оставшаяся неотмеченной часть обосновывается теоремой о функционале Минковского. $\triangleright$

5.1.2. *Пусть $p,\ q : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — две полунормы. Неравенство $p \le q$ (в множестве $(\mathbb{R}^{\cdot})^X$) имеет место в том и только в том случае, если $B_p \supset B_q$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Ясно, что $\{q \le 1\} \subset \{p \le 1\}$.

$\Leftarrow$: Имеем, по 5.1.1 (4), $p = p_{B_p}$ и $q = p_{B_q}$. Возьмем $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $t_1 < t_2$. Если $t_1 < 0$, то $\{q \le t_1\} = \varnothing$ и, стало быть, $\{q \le t_1\} \subset \{p \le t_2\}$. Если же $t_1 \ge 0$, то $t_1 B_q \subset t_1 B_p \subset t_2 B_p$. Значит, в силу 3.8.3, $p \le q$. $\triangleright$

5.1.3. *Пусть X, Y — векторные пространства, $T \subset X \times Y$ — линейное соответствие и $p : Y \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма. Пусть, далее, $p_T(x) := \inf p \circ T(x)$ для $x \in X$. Тогда $p_T : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма, множество $B_T := T^{-1}(B_p)$ абсолютно выпукло, причем $p_T = p_{B_T}$.*

$\triangleleft$ Для $x_1,\ x_2 \in X$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{F}$ имеем

$$\begin{gathered} p_T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \inf p(T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) \le \\ \le \inf p(\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)) \le \\ \le \inf(|\alpha_1| p(T(x_1)) + |\alpha_2| p(T(x_2))) = \\ = |\alpha_1| p_T(x_1) + |\alpha_2| p_T(x_2), \end{gathered}$$

т. е. p_T — полунорма.

То, что множество B_T абсолютно выпукло, следует из 5.1.1 (4) и 3.1.8. Если $x \in B_T$, то для некоторого $y \in B_p$ выполнено $(x,\ y) \in T$. Отсюда $p_T(x) \le p(y) \le 1$, т. е. $B_T \subset B_{p_T}$. Если, в свою очередь, $x \in \overset{\circ}{B}_{p_T}$, то $p_T(x) = \inf\{p(y) :\ (x,\ y) \in T\} < 1$. Значит, найдется $y \in T(x)$ такой, что $p(y) < 1$. Стало быть, $x \in T^{-1}(\overset{\circ}{B}_p) \subset T^{-1}(B_p) = B_T$. Итак, $\overset{\circ}{B}_{p_T} \subset B_T \subset B_{p_T}$. Привлекая 5.1.1 (4), видим: $p_{B_T} = p_T$. $\triangleright$

5.1.4. Определение. Полунорму p_T, построенную в 5.1.3, называют ***прообразом полунормы*** p при соответствии T.

5.1.5. Определение. Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — полунорма (в силу 3.4.3 эта запись означает, что $\operatorname{dom} p = X$). Пару $(X,\ p)$ называют ***полунормированным пространством.*** Часто, допуская обычную вольность, само X называют полунормированным пространством.

5.1.6. Определение. Непустое множество всюду определенных полунорм (в $\mathbb{R}^X$) называют ***мультинормой*** и обозначают $\mathfrak{M}_X$ или просто $\mathfrak{M}$, если ясно, о каком пространстве X идет речь. Пару $(X, \mathfrak{M}_X)$, ра́вно как и исходное X, называют ***мультинормированным пространством.***

5.1.7. *Множество полунорм $\mathfrak{M}$ в $(\mathbb{R}^{\cdot})^X$ является мультинормой в том и только в том случае, если (X, p) является полунормированным пространством для всякого $p \in \mathfrak{M}$.* $\lhd\rhd$

5.1.8. Определение. Мультинорму $\mathfrak{M}_X$ называют ***хаусдорфовой*** (или ***отделимой***), если для любого $x \in X$, $x \neq 0$, существует полунорма $p \in \mathfrak{M}_X$ такая, что $p(x) \neq 0$. В этом случае X называют ***хаусдорфовым*** (или ***отделимым***) ***мультинормированным пространством.***

5.1.9. Определение. Хаусдорфову мультинорму, состоящую из одного элемента, называют ***нормой.*** Единственный элемент нормы в X (как хорошо известно) также называют ***нормой*** в X и обозначают $\|\cdot\|$ или (реже) $\|\cdot\|_X$, и даже $\|\cdot \mid X\|$, если есть необходимость в указании на пространство X. Пару $(X, \|\cdot\|)$ называют ***нормированным пространством.*** Как правило, так же называют и X.

5.1.10. Примеры.

(1) Полунормированное пространство (X, p) рассматривается как мультинормированное пространство $(X, \{p\})$. То же относится к нормированному пространству.

(2) Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех (всюду определенных) полунорм на пространстве X. Тогда $\mathfrak{M}$ — хаусдорфова мультинорма, которую называют ***сильнейшей мультинормой*** в X.

(3) Пусть $(Y, \mathfrak{N})$ — мультинормированное пространство и $T \subset X \times Y$ — линейное соответствие, причем $\operatorname{dom} T = X$. В силу 3.4.10 и 5.1.1 (5) для $p \in \mathfrak{N}$ полунорма p_T всюду определена и, стало быть, $\mathfrak{M} := \{p_T : \ p \in \mathfrak{N}\}$ — мультинорма в X. Мультинорму $\mathfrak{N}$ называют ***прообразом мультинормы*** $\mathfrak{N}$ при соответствии T и (иногда) обозначают $\mathfrak{N}_T$. Отметим, что если $T \in \mathscr{L}(X, Y)$, то $\mathfrak{M} = \{p \circ T : \ p \in \mathfrak{N}\}$. В связи с этим используют естественное обозначение $\mathfrak{N} \circ T := \mathfrak{M}$. Особо выделим случай, когда X — это подпространство Y_0 в Y и T — тождественное вложение $T := \iota : Y_0 \to Y$. В такой ситуации Y_0, как правило, рассматривают как мультинормированное пространство с мультинормой $\mathfrak{N} \circ \iota$. Более того, некорректно используют фразу «$\mathfrak{N}$ — мультинорма в Y_0». Эту некорректность использовать очень удобно.

(4) Основное поле $\mathbb{F}$ наделено, как известно, нормой $|\cdot| : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$. Пусть X — векторное пространство и $f \in X^{\#}$. Так как $f : X \to \mathbb{F}$, то определен прообраз нормы в основном поле: $p_f(x) := |f(x)|$ $(x \in X)$. Если теперь $\mathscr{X}$ — некоторое подпространство в $X^{\#}$, то мультинорму $\sigma(X,\ \mathscr{X}) := \{p_f :\ f \in \mathscr{X}\}$ называют ***слабой мультинормой*** в X, наведенной $\mathscr{X}$.

(5) Пусть $(X,\ p)$ — полунормированное пространство, X_0 — подпространство в X и $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение. Линейное соответствие φ^{-1} определено на всем пространстве X/X_0. Значит, имеется полунорма $p_{\varphi^{-1}}$, которую называют ***фактор-полунормой*** p по подпространству X_0 и обозначают p_{X/X_0}. Пространство $(X/X_0,\ p_{X/X_0})$ называют ***фактор-пространством*** пространства $(X,\ p)$ по подпространству X_0. Определение фактор-пространства общего мультинормированного пространства связано с некоторой тонкостью и введено в 5.3.11.

(6) Пусть X — векторное пространство и $\mathfrak{M} \subset (\mathbb{R}^{\cdot})^X$ — множество полунорм на этом пространстве. В этой ситуации можно говорить об $\mathfrak{M}$ как о мультинорме на пространстве $X_0 := \cap\{\operatorname{dom} p :\ p \in \mathfrak{M}\}$. Более точно, подразумевая мультинормированное пространство $(X_0,\ \{p_\iota : p \in \mathfrak{M}\})$, где ι — тождественное вложение X_0 в X, употребляют выражения: «$\mathfrak{M}$ — мультинорма» или «рассмотрим (мультинормированное) пространство, порожденное $\mathfrak{M}$». Вот типичный образец: «семейство полунорм

$$\left\{p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| :\ \alpha,\ \beta \text{ — мультииндексы}\right\}$$

задает (мультинормированное) пространство бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций на $\mathbb{R}^N$» (такие функции часто называют *умеренными*, ср. 10.11.6).

(7) Пусть $(X,\ \|\cdot\|)$ и $(Y,\ \|\cdot\|)$ — нормированные пространства (над одним основным полем $\mathbb{F}$). Для $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ рассмотрим «***операторную норму***», т. е. величину

$$\|T\| := \sup\ \{\|Tx\| :\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\} = \sup_{x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

(Здесь и в дальнейшем в аналогичных случаях принято считать, что $0/0 := 0$.)

Видно, что $\|\cdot\| : \mathscr{L}(X,\ Y) \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — полунорма. В самом деле, положив $B_X := \{\|\cdot\|_X \leq 1\}$, для $T_1,\ T_2 \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{F}$ имеем

$$\|\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2\| = \sup \|\cdot\|_{\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2}(B_X) =$$

$$= \sup \|\cdot\|((\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(B_X)) \leq \sup \|\alpha_1 T_1(B_X) + \alpha_2 T_2(B_X)\| \leq$$

$$\leq |\alpha_1| \sup \|\cdot\|_{T_1}(B_X) + |\alpha_2| \sup \|\cdot\|_{T_2}(B_X) =$$

$$= |\alpha_1|\,\|T_1\| + |\alpha_2|\,\|T_2\|.$$

Подпространство $B(X,\ Y)$, являющееся эффективной областью определения введенной полунормы, называют ***пространством ограниченных операторов***, а его элементы — ***ограниченными операторами***. Ясно, что векторное пространство $B(X,\ Y)$ нормировано (операторной нормой). Отметим, что оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ ограничен в том и только в том случае, если для него справедливо ***нормативное неравенство***, т. е. если найдется строго положительное число K такое, что

$$\|Tx\|_Y \leq K\,\|x\|_X \quad (x \in X).$$

При этом $\|T\|$ есть точная нижняя граница чисел K, фигурирующих в нормативном неравенстве. $\lhd\rhd$

(8) Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{F}$ и $\|\cdot\|$ — норма в X. Пусть, далее, $X' := B(X,\ \mathbb{F})$ — ***сопряженное пространство***, т. е. векторное пространство ограниченных функционалов f с «***сопряженной нормой***»:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| :\ \|x\| \leq 1\} = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Рассмотрим пространство $X'' := (X')' := B(X',\ \mathbb{F})$ — ***второе сопряженное*** к X пространство. Для элементов $x \in X$ и $f \in X'$ положим

$$x'' := \iota(x) : f \mapsto f(x).$$

Несомненно, что $\iota(x) \in (X')^{\#} = \mathscr{L}(X',\ \mathbb{F})$. Помимо этого,

$$\|x''\| = \|\iota(x)\| = \sup\ \{|\iota(x)(f)| :\ \|f\|_{X'} \leq 1\} =$$

$$= \sup\{|f(x)| : |f(x)| \le \|x\|_X \ (x \in X)\} =$$

$$= \sup\{|f(x)| : f \in |\partial|(\| \cdot \|_X)\} = \|x\|_X.$$

Последнее равенство следует, например, из теоремы 3.6.5 и леммы 3.7.9. Таким образом, $\iota(x) \in X''$ для каждого $x \in X$. Понятно, что оператор $\iota : X \to X''$, действующий по правилу $\iota : x \mapsto \iota(x)$, является линейным и ограниченным, при этом ι — мономорфизм и $\|\iota x\| = \|x\|$ для всех $x \in X$. Оператор ι называют *каноническим вложением* X во второе сопряженное пространство или, более образно, *двойным штрихованием.* Более того, как правило, элементы x и $x'' := \iota x$ не различают, т. е. X рассматривают как подпространство X''. Нормированное пространство X называют *рефлексивным*, если X совпадает с X'' (при указанном вложении). Рефлексивные пространства обладают многими достоинствами. Очевидно, однако, что не все пространства рефлексивны. Так, к сожалению, не рефлексивно пространство $C([0,\ 1],\ \mathbb{F})$. ◁▷

5.1.11. Замечание. Построения, проведенные в 5.1.10 (8), показывают известную симметрию (или «двойственность») между X и X'. В этой связи для обозначения действия элемента $x \in X$ на элемент $f \in X'$ (или действия f на x) используют запись $(x,\ f) := \langle x \mid f \rangle := f(x)$. Для достижения наибольшего единообразия элементы X' обозначают символами типа x', т. е. $\langle x \mid x' \rangle = (x,\ x') = x'(x)$.

5.2. Равномерность и топология мультинормированного пространства

5.2.1. *Пусть $(X,\ p)$ — полунормированное пространство. Возьмем $x_1,\ x_2 \in X$ и положим $d_p(x_1,\ x_2) := p(x_1 - x_2)$. Тогда*

(1) $d_p(X^2) \subset \mathbb{R}_+,\ \{d \le 0\} \supset I_X$;

(2) $\{d_p \le t\} = \{d_p \le t\}^{-1},\ \{d_p \le t\} = t\{d_p \le 1\}$ $(t \in \mathbb{R}_+ \setminus 0)$;

(3) $\{d_p \le t_1\} \circ \{d_p \le t_2\} \subset \{d_p \le t_1 + t_2\}$ $(t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}_+)$;

(4) $\{d_p \le t_1\} \cap \{d_p \le t_2\} \supset \{d_p \le t_1 \wedge t_2\}$ $(t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}_+)$;

(5) *p — норма $\Leftrightarrow$ d_p — метрика.* ◁▷

5.2.2. Определение. Фильтр $\mathscr{U}_p := \operatorname{fil}\{\{d_p \le t\} : t \in \mathbb{R}_+ \setminus 0\}$ называют *равномерностью пространства* $(X,\ p)$.