$$= \sup\{|f(x)| : \ |f(x)| \le \|x\|_X \ (x \in X)\} =$$

$$= \sup\{|f(x)| : \ f \in |\partial|(\| \cdot \|_X)\} = \|x\|_X.$$

Последнее равенство следует, например, из теоремы 3.6.5 и леммы 3.7.9. Таким образом, $\iota(x) \in X''$ для каждого $x \in X$. Понятно, что оператор $\iota : X \to X''$, действующий по правилу $\iota : x \mapsto \iota(x)$, является линейным и ограниченным, при этом ι — мономорфизм и $\|\iota x\| = \|x\|$ для всех $x \in X$. Оператор ι называют *каноническим вложением* X во второе сопряженное пространство или, более образно, *двойным штрихованием*. Более того, как правило, элементы x и $x'' := \iota x$ не различают, т. е. X рассматривают как подпространство X''. Нормированное пространство X называют *рефлексивным*, если X совпадает с X'' (при указанном вложении). Рефлексивные пространства обладают многими достоинствами. Очевидно, однако, что не все пространства рефлексивны. Так, к сожалению, не рефлексивно пространство $C([0,\ 1],\ \mathbb{F})$. ◁▷

5.1.11. Замечание. Построения, проведенные в 5.1.10 (8), показывают известную симметрию (или «двойственность») между X и X'. В этой связи для обозначения действия элемента $x \in X$ на элемент $f \in X'$ (или действия f на x) используют запись $(x,\ f) := \langle x \,|\, f \rangle := f(x)$. Для достижения наибольшего единообразия элементы X' обозначают символами типа x', т. е. $\langle x \,|\, x' \rangle = (x,\ x') = x'(x)$.

5.2. Равномерность и топология мультинормированного пространства

5.2.1. *Пусть $(X,\ p)$ — полунормированное пространство. Возьмем $x_1,\ x_2 \in X$ и положим $d_p(x_1,\ x_2) := p(x_1 - x_2)$. Тогда*

(1) $d_p(X^2) \subset \mathbb{R}_+,\ \{d \le 0\} \supset I_X$;

(2) $\{d_p \le t\} = \{d_p \le t\}^{-1},\ \{d_p \le t\} = t\{d_p \le 1\}$ $(t \in \mathbb{R}_+ \setminus 0)$;

(3) $\{d_p \le t_1\} \circ \{d_p \le t_2\} \subset \{d_p \le t_1 + t_2\}\ (t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}_+)$;

(4) $\{d_p \le t_1\} \cap \{d_p \le t_2\} \supset \{d_p \le t_1 \wedge t_2\}\ (t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}_+)$;

(5) *p — норма $\Leftrightarrow$ d_p — метрика.* ◁▷

5.2.2. Определение. Фильтр $\mathscr{U}_p := \mathrm{fil}\,\{\{d_p \le t\} :\ t \in \mathbb{R}_+ \setminus 0\}$ называют *равномерностью пространства* $(X,\ p)$.

5.2.3. *Пусть* $\mathscr{U}_p$ — *равномерность полунормированного пространства. Тогда*

(1) $\mathscr{U}_p \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $U \in \mathscr{U}_p \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}_p$;

(3) $(\forall U \in \mathscr{U}_p)\ (\exists\, V \in \mathscr{U}_p)\ V \circ V \subset U$. $\lhd\rhd$

5.2.4. Определение. Пусть $(X,\ \mathfrak{M})$ — мультинормированное пространство. Фильтр $\mathscr{U} := \sup\{\mathscr{U}_p : p \in \mathfrak{M}\}$ называют ***равномерностью*** пространства X (используют также обозначения $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$, $\mathscr{U}_X$ и т. п.). (Это определение корректно в силу 5.2.3 (1) и 1.3.13.)

5.2.5. *Пусть* $(X,\ \mathfrak{M})$ — *мультинормированное пространство и* $\mathscr{U}$ — *соответствующая равномерность. Тогда*

(1) $\mathscr{U} \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$;

(3) $(\forall U \in \mathscr{U})\ (\exists V \in \mathscr{U})\ V \circ V \subset U$.

$\lhd$ Проверим (3). Если $U \in \mathscr{U}$, то по 1.2.18 и 1.3.8 найдутся полунормы $p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M}$ такие, что $U = \mathscr{U}_{\{p_1,\dots,p_n\}} = \mathscr{U}_{p_1} \vee \ldots \vee \mathscr{U}_{p_n}$. Привлекая 1.3.13, подыщем множества $U_k \in \mathscr{U}_{p_k}$ из условия $U \supset U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Используя 5.2.3 (3), выберем $V_k \in \mathscr{U}_{p_k}$, для которых $V_k \circ V_k \subset U_k$. Ясно, что

$$(V_1 \cap \ldots \cap V_n) \circ (V_1 \cap \ldots \cap V_n) \subset V_1 \circ V_1 \cap \ldots \cap V_n \circ V_n \subset$$

$$\subset U_1 \cap \ldots \cap U_n.$$

Помимо этого, $V_1 \cap \ldots \cap V_n \in \mathscr{U}_{p_1} \vee \ldots \vee \mathscr{U}_{p_n} \subset \mathscr{U}$. $\rhd$

5.2.6. *Мультинорма* $\mathfrak{M}$ *в* X *хаусдорфова в том и только в том случае, если равномерность* $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ *тоже хаусдорфова, т. е.* $\cap\{V : V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}\} = I_X$.

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $(x,\ y) \notin I_X$, т. е. $x \neq y$. Тогда для некоторой полунормы $p \in \mathfrak{M}$ будет $p(x-y) > 0$. Значит, $(x,\ y) \notin \{d_p \leq 1/2\, p(x-y)\}$. Но последнее множество входит в $\mathscr{U}_p$, а потому и в $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$. Итак, $X^2 \setminus I_X \subset X^2 \setminus \cap\{V : V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}\}$. Помимо этого, $I_X \subset \cap\{V : V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}\}$.

$\Leftarrow$: Пусть $p(x) = 0$ при всех $p \in \mathfrak{M}$. Тогда $(x,\ 0) \in V$ для любого $V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ и, стало быть, $(x,\ 0) \in I_X$ по условию. Следовательно, $x = 0$. $\rhd$

5.2.7. *Для пространства X с равномерностью $\mathscr{U}_X$ положим*

$$\tau(x) := \{U(x) : \ U \in \mathscr{U}_X\} \quad (x \in X).$$

Тогда $\tau(x)$ — фильтр для каждого $x \in X$. При этом

(1) $\tau(x) \subset \operatorname{fil}\{x\}$;

(2) $(\forall U \in \tau(x))\ (\exists V \in \tau(x)\ \&\ V \subset U)\ (\forall y \in V)\ V \in \tau(y)$.

$\lhd$ Очевидно (ср. 4.1.8). $\rhd$

5.2.8. Определение. Отображение $\tau : x \mapsto \tau(x)$ называют *топологией* рассматриваемого мультинормированного пространства $(X, \ \mathfrak{M})$, а элементы фильтра $\tau(x)$ — *окрестностями* точки x. Для обозначения топологии используют также более детальные символы: τ_X, $\tau_{\mathfrak{M}}$, $\tau(\mathscr{U}_{\mathfrak{M}})$ и т. п.

5.2.9. *Для любого $x \in X$ выполнено*

$$\tau_X(x) = \sup\{\tau_p(x) : \ p \in \mathfrak{M}_X\}. \ \lhd\rhd$$

5.2.10. *Пусть X — мультинормированное пространство. Тогда для $x \in X$ имеет место соотношение*

$$U \in \tau(x) \Leftrightarrow U - x \in \tau_X(0).$$

$\lhd$ В силу 5.2.9 и 1.3.13 можно ограничиться случаем полунормированного пространства $(X, \ p)$. При этом для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо представление $\{d_p \le \varepsilon\}(x) = \varepsilon B_p + x$, где $B_p := \{p \le 1\}$. В самом деле, если $p(y-x) \le \varepsilon$, то $y = \varepsilon(\varepsilon^{-1}(y-x))+x$ и $\varepsilon^{-1}(y-x) \in B_p$. В свою очередь, если $y \in \varepsilon B_p + x$, то $p(y - x) = \inf\{t > 0 : \ y - x \in tB_p\} \le \varepsilon$. $\rhd$

5.2.11. Замечание. Из доказательства 5.2.10 видно, сколь важную роль играет шар единичного радиуса с центром в нуле (полу)нормированного пространства $(X, \ p)$. В этой связи за ним закреплены название «*единичный шар пространства* X» и обозначения B_p, B_X и т. п.

5.2.12. *Мультинорма $\mathfrak{M}_X$ хаусдорфова в том и только в том случае, если хаусдорфова топология τ_X, т. е. если для любых различных x_1, x_2 из X найдутся окрестности $U_1 \in \tau_X(x_1)$ и $U_2 \in \tau_X(x_2)$ такие, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.*

$\lhd \Rightarrow$: Пусть $x_1 \neq x_2$ и для $p \in \mathfrak{M}_X$ выполнено $\varepsilon := p(x_1 - x_2) > 0$. Положим $U_1 := x_1 + \varepsilon/3\, B_p$, $U_2 := x_2 + \varepsilon/3\, B_p$. По 5.2.10, $U_k \in \tau_X(x_k)$. Убедимся, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. В самом деле, если $y \in U_1 \cap U_2$, то $p(x_1 - y) \leq \varepsilon/3$ и $p(x_2 - y) \leq \varepsilon/3$. Отсюда $p(x_1 - x_2) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon = p(x_1 - x_2)$, чего быть не может.

$\Leftarrow$: Если $(x_1,\ x_2) \in \cap\{V :\ V \in \mathscr{U}_X\}$, то $x_2 \in \cap\{V(x_1) :\ V \in \mathscr{U}_X\}$. Поэтому $x_1 = x_2$ и, стало быть, на основании 5.2.6 мультинорма $\mathfrak{M}_X$ хаусдорфова. $\rhd$

5.2.13. Замечание. Наличие в мультинормированном пространстве равномерности и соответствующей топологии позволяет, очевидно, использовать такие понятия, как равномерная непрерывность, полнота, непрерывность, открытость и замкнутость и т. п.

5.2.14. *Пусть $(X,\ p)$ — полунормированное пространство и X_0 — подпространство в X. Фактор-пространство $(X/X_0,\ p_{X/X_0})$ хаусдорфово в том и только в том случае, если X_0 — замкнутое множество.*

$\lhd \Rightarrow$: Пусть $x \notin X_0$. Тогда $\varphi(x) \neq 0$, где, как обычно, $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение. По условию будет $0 \neq \varepsilon := p_{X/X_0}(\varphi(x)) = p_{\varphi^{-1}}(\varphi(x)) = \inf\{p(x + x_0) :\ x_0 \in X_0\}$. Значит, шар $x + \varepsilon/2\, B_p$ не пересекается с X_0, т. е. x — внешняя точка X_0. Итак, X_0 замкнуто.

$\Leftarrow$: Пусть $\overline{x}$ — ненулевая точка фактор-пространства X/X_0 и $\overline{x} = \varphi(x)$ для подходящего элемента x из пространства X. Если $p_{X/X_0}(\overline{x}) = 0$, то $0 = \inf\{p(x - x_0) :\ x_0 \in X_0\}$, т. е. имеется последовательность (x_n) в X_0, для которой $x_n \to x$. Следовательно, по 4.1.19, $x \in X_0$ и $\overline{x} = 0$. Получили противоречие. $\rhd$

5.2.15. *Замыкание* Г*-множества —* Г*-множество.*

$\lhd$ Пусть $U \in (\Gamma)$ и $U \neq \varnothing$ (иначе все ясно). В силу 4.1.9 для точек $x,\ y \in \operatorname{cl} U$ найдутся сети (x_γ), (y_γ) элементов U такие, что $x_\gamma \to x$, $y_\gamma \to y$. Если $(\alpha,\ \beta) \in \Gamma$, то $\alpha x_\gamma + \beta y_\gamma \in U$. Вновь привлекая 4.1.19, выводим $\alpha x + \beta y = \lim(\alpha x_\gamma + \beta y_\gamma) \in \operatorname{cl} U$. $\rhd$

5.3. Сравнение мультинорм

5.3.1. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две мультинормы в векторном пространстве. Говорят, что $\mathfrak{M}$ *сильнее* $\mathfrak{N}$, и пишут $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$, если $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} \supset \mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$. Если одновременно $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, то говорят, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *эквивалентны*, и пишут $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.