$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $x_1 \ne x_2$ и для $p \in \mathfrak{M}_X$ выполнено $\varepsilon := p(x_1 - x_2) > 0$. Положим $U_1 := x_1 + \varepsilon/3\, B_p$, $U_2 := x_2 + \varepsilon/3\, B_p$. По 5.2.10, $U_k \in \tau_X(x_k)$. Убедимся, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. В самом деле, если $y \in U_1 \cap U_2$, то $p(x_1 - y) \le \varepsilon/3$ и $p(x_2 - y) \le \varepsilon/3$. Отсюда $p(x_1 - x_2) \le 2\varepsilon/3 < \varepsilon = p(x_1 - x_2)$, чего быть не может.

$\Leftarrow$: Если $(x_1,\ x_2) \in \cap\{V :\ V \in \mathscr{U}_X\}$, то $x_2 \in \cap\{V(x_1) :\ V \in \mathscr{U}_X\}$. Поэтому $x_1 = x_2$ и, стало быть, на основании 5.2.6 мультинорма $\mathfrak{M}_X$ хаусдорфова. $\rhd$

5.2.13. Замечание. Наличие в мультинормированном пространстве равномерности и соответствующей топологии позволяет, очевидно, использовать такие понятия, как равномерная непрерывность, полнота, непрерывность, открытость и замкнутость и т. п.

5.2.14. *Пусть $(X,\ p)$ — полунормированное пространство и X_0 — подпространство в X. Фактор-пространство $(X/X_0,\ p_{X/X_0})$ хаусдорфово в том и только в том случае, если X_0 — замкнутое множество.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $x \notin X_0$. Тогда $\varphi(x) \ne 0$, где, как обычно, $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение. По условию будет $0 \ne \varepsilon := p_{X/X_0}(\varphi(x)) = p_{\varphi^{-1}}(\varphi(x)) = \inf\{p(x + x_0) :\ x_0 \in X_0\}$. Значит, шар $x + \varepsilon/2\, B_p$ не пересекается с X_0, т. е. x — внешняя точка X_0. Итак, X_0 замкнуто.

$\Leftarrow$: Пусть $\overline{x}$ — ненулевая точка фактор-пространства X/X_0 и $\overline{x} = \varphi(x)$ для подходящего элемента x из пространства X. Если $p_{X/X_0}(\overline{x}) = 0$, то $0 = \inf\{p(x - x_0) :\ x_0 \in X_0\}$, т. е. имеется последовательность (x_n) в X_0, для которой $x_n \to x$. Следовательно, по 4.1.19, $x \in X_0$ и $\overline{x} = 0$. Получили противоречие. $\rhd$

5.2.15. *Замыкание* Г*-множества —* Г*-множество.*

$\lhd$ Пусть $U \in (\Gamma)$ и $U \ne \varnothing$ (иначе все ясно). В силу 4.1.9 для точек $x,\ y \in \operatorname{cl} U$ найдутся сети (x_γ), (y_γ) элементов U такие, что $x_\gamma \to x$, $y_\gamma \to y$. Если $(\alpha,\ \beta) \in \Gamma$, то $\alpha x_\gamma + \beta y_\gamma \in U$. Вновь привлекая 4.1.19, выводим $\alpha x + \beta y = \lim(\alpha x_\gamma + \beta y_\gamma) \in \operatorname{cl} U$. $\rhd$

5.3. Сравнение мультинорм

5.3.1. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две мультинормы в векторном пространстве. Говорят, что $\mathfrak{M}$ *сильнее* $\mathfrak{N}$, и пишут $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$, если $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} \supset \mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$. Если одновременно $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, то говорят, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *эквивалентны*, и пишут $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.

5.3.2. *Теорема о сравнении мультинорм.* *Для мультинорм $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в векторном пространстве X эквивалентны утверждения:*

(1) $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$;

(2) *для всякого $x \in X$ выполнено $\tau_{\mathfrak{M}}(x) \supset \tau_{\mathfrak{N}}(x)$;*

(3) $\tau_{\mathfrak{M}}(0) \supset \tau_{\mathfrak{N}}(0)$;

(4) $(\forall\, q \in \mathfrak{N})\ (\exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M})$ $(\exists\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}_+ \setminus 0)\ B_q \supset \varepsilon_1 B_{p_1} \cap \dots \cap \varepsilon_n B_{p_n}$;

(5) $(\forall\, q \in \mathfrak{N})\ (\exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M})\ (\exists\, t > 0)\ q \le t(p_1 \vee \dots \vee p_n)$ *(порядок взят из K-пространства $\mathbb{R}^X$).*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4): Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (5): Используя теорему о функционале Минковского (ср. 5.1.2), имеем

$$q \le p_{B_{p_1/\varepsilon_1}} \vee \dots \vee p_{B_{p_n/\varepsilon_n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon_1} p_1\right) \vee \dots \vee \left(\frac{1}{\varepsilon_n} p_n\right) \le \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \vee \dots \vee \frac{1}{\varepsilon_n}\right) p_1 \vee \dots \vee p_n.$$

(5) $\Rightarrow$ (1): Достаточно проверить, что $\mathfrak{M} \succ \{q\}$ для полунормы $q \in \mathfrak{N}$. Если $V \in \mathscr{U}_q$, то $V \supset \{d_q \le \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. По условию

$$\{d_q \le \varepsilon\} \supset \left\{d_{p_1} \le \frac{\varepsilon}{t}\right\} \cap \dots \cap \left\{d_{p_n} \le \frac{\varepsilon}{t}\right\}$$

для подходящих $p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M}$ и $t > 0$. Множество, стоящее в правой части последнего включения, — элемент $\mathscr{U}_{p_1} \vee \dots \vee \mathscr{U}_{p_n} = \mathscr{U}_{\{p_1, \dots, p_n\}} \subset \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$. Значит, V также входит в $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$. $\rhd$

5.3.3. Определение. Пусть $p,\ q : X \to \mathbb{R}$ — две полунормы в X. Говорят, что p *сильнее* q, и пишут $p \succ q$, если $\{p\} \succ \{q\}$. Аналогично трактуют *эквивалентность* полунорм $p \sim q$.

5.3.4. $p \succ q \Leftrightarrow (\exists\, t > 0)\ q \le tp \Leftrightarrow (\exists\, t \ge 0)\ B_q \supset tB_p$;

$$p \sim q \Leftrightarrow (\exists\, t_1,\ t_2 > 0)\ t_2 p \le q \le t_1 p \Leftrightarrow (\exists\, t_1,\ t_2 > 0)\ t_1 B_p \subset B_q \subset t_2 B_p.$$

$\lhd$ Следует из 5.3.2 и 5.1.2. $\rhd$

5.3.5. *Теорема Рисса.* *Пусть $p,\ q : \mathbb{F}^N \to \mathbb{R}$ — полунормы на конечномерном пространстве $\mathbb{F}^N$. Тогда $p \succ q \Leftrightarrow \ker p \subset \ker q$.* $\lhd\rhd$

5.3.6. *Следствие.* *Любые две нормы на конечномерном пространстве эквивалентны.* $\lhd\rhd$

5.3.7. *Пусть* $(X,\ \mathfrak{M})$ *и* $(Y,\ \mathfrak{N})$ *— мультинормированные пространства и* $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ *— линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{N} \circ T \prec \mathfrak{M}$;

(2) $T^{\times}(\mathscr{U}_X) \supset \mathscr{U}_Y,\ T^{\times -1}(\mathscr{U}_Y) \subset \mathscr{U}_X$;

(3) $x \in X \Rightarrow T(\tau_X(x)) \supset \tau_Y(Tx)$;

(4) $T(\tau_X(0)) \supset \tau_Y(0),\ \tau_X(0) \supset T^{-1}(\tau_Y(0))$;

(5) $(\forall\, q \in \mathfrak{N})\ (\exists\, p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{M})\ q \circ T \prec p_1 \vee \dots \vee p_n$. $\lhd\rhd$

5.3.8. *Пусть* $(X,\ \|\cdot\|_X)$ *и* $(Y,\ \|\cdot\|_Y)$ *— нормированные пространства и* $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ *— линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) T *ограничен (т. е.* $T \in B(X,\ Y)$*);*

(2) $\|\cdot\|_X \succ \|\cdot\|_Y \circ T$;

(3) T *равномерно непрерывен;*

(4) T *непрерывен;*

(5) T *непрерывен в нуле.*

$\lhd$ Все сказанное — частный случай 5.3.7. $\rhd$

5.3.9. Замечание. Предложение 5.3.7 показывает, что бывает удобно рассматривать вместо исходной мультинормы $\mathfrak{M}$ какую-либо эквивалентную ей фильтрованную по возрастанию (относительно отношения $\geq$ или $\succ$) мультинорму. В качестве такой можно взять мультинорму $\overline{\mathfrak{M}} := \{\sup \mathfrak{M}_0 :\ \mathfrak{M}_0$ — непустое конечное подмножество $\mathfrak{M}\}$. В то же время при рассмотрении нефильтрованных мультинорм необходима известная осторожность.

5.3.10. Контрпример. Пусть $X := \mathbb{F}^{\Xi}$ и X_0 состоит из постоянных отображений $X_0 := \mathbb{F}\mathbf{1}$, где $\mathbf{1} : \xi \mapsto 1\ (\xi \in \Xi)$. Положим $\mathfrak{M} := \{p_\xi :\ \ \xi \in \Xi\}$, где $p_\xi(x) := |x(\xi)|\ (x \in \mathbb{F}^{\Xi})$. Ясно, что $\mathfrak{M}$ — мультинорма в X. Пусть теперь $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение. Несомненно, что $\mathfrak{M}_{\varphi^{-1}}$ состоит только из нуля. В то же время мультинорма $\overline{\mathfrak{M}}_{\varphi^{-1}}$ хаусдорфова.

5.3.11. Определение. Пусть $(X,\ \mathfrak{M})$ — мультинормированное пространство и X_0 — подпространство в X. Мультинорму $\overline{\mathfrak{M}}_{\varphi^{-1}}$, где $\varphi : X \to X/X_0$ — каноническое отображение, называют ***фактор-мультинормой*** и обозначают $\mathfrak{M}_{X/X_0}$. Пространство $(X/X_0,\ \mathfrak{M}_{X/X_0})$

называют *фактор-пространством* пространства X по подпространству X_0.

5.3.12. *Фактор-пространство X/X_0 хаусдорфово в том и только в том случае, если X_0 замкнуто.* $\lhd\rhd$

5.4. Метризуемые и нормируемые пространства

5.4.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathfrak{M})$ — мультинормированное пространство. Назовем $(X,\ \mathfrak{M})$ *метризуемым*, если существует такая метрика d на X, что $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_d$. Если на X существует норма, эквивалентная исходной мультинорме $\mathfrak{M}$, то X называют *нормируемым*. Если же на X существует счетная мультинорма, эквивалентная исходной, то X называют *счетнонормируемым*.

5.4.2. ***Критерий метризуемости.*** *Мультинормированное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно счетнонормируемо и хаусдорфово.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_d$. Переходя, если нужно, к мультинорме $\overline{\mathfrak{M}}$, будем считать, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ можно указать такие полунорму $p_n \in \mathfrak{M}$ и число $t_n > 0$, для которых $\{d \le 1/n\} \supset \{d_{p_n} \le t_n\}$. Положим $\mathfrak{N} := \{p_n :\ n \in \mathbb{N}\}$. Несомненно, что $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$. Если $V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$, то $V \supset \{d \le 1/n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ по определению метрической равномерности. Значит, по построению $V \in \mathscr{U}_{p_n} \subset \mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$, т. е. $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. Хаусдорфовость $\mathscr{U}_d$ отмечена в 4.1.7. Привлекая 5.2.6, видим, что $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ и $\mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$ хаусдорфовы.

$\Leftarrow$: Переходя, если нужно, к эквивалентной мультинорме, будем считать, что пространство счетнонормировано и хаусдорфово: $\mathfrak{M} := \{p_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ и $\mathfrak{M}$ — хаусдорфова мультинорма.

Для $x_1,\ x_2 \in X$ положим

$$d(x_1,\ x_2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_1 - x_2)}{1 + p_k(x_1 - x_2)}$$

(ряд в правой части этой формулы мажорируется сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$, так что определение d корректно).

Проверим, что d — это метрика. Достаточно убедиться лишь в справедливости неравенства треугольника. Прежде всего, положим $\alpha(t) := t(1+t)^{-1}$ $(t \in \mathbb{R}_+)$. Ясно, что $\alpha'(t) = (1+t)^{-2} > 0$.