называют *фактор-пространством* пространства X по подпространству X_0.

5.3.12. *Фактор-пространство X/X_0 хаусдорфово в том и только в том случае, если X_0 замкнуто.* $\triangleleft\triangleright$

5.4. Метризуемые и нормируемые пространства

5.4.1. Определение. Пусть $(X,\ \mathfrak{M})$ — мультинормированное пространство. Назовем $(X,\ \mathfrak{M})$ *метризуемым*, если существует такая метрика d на X, что $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_d$. Если на X существует норма, эквивалентная исходной мультинорме $\mathfrak{M}$, то X называют *нормируемым*. Если же на X существует счетная мультинорма, эквивалентная исходной, то X называют *счетнонормируемым*.

5.4.2. ***Критерий метризуемости.*** *Мультинормированное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно счетнонормируемо и хаусдорфово.*

$\triangleleft \Rightarrow$: Пусть $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_d$. Переходя, если нужно, к мультинорме $\overline{\mathfrak{M}}$, будем считать, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ можно указать такие полунорму $p_n \in \mathfrak{M}$ и число $t_n > 0$, для которых $\{d \le 1/n\} \supset \{d_{p_n} \le t_n\}$. Положим $\mathfrak{N} := \{p_n :\ n \in \mathbb{N}\}$. Несомненно, что $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$. Если $V \in \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$, то $V \supset \{d \le 1/n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ по определению метрической равномерности. Значит, по построению $V \in \mathscr{U}_{p_n} \subset \mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$, т. е. $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. Хаусдорфовость $\mathscr{U}_d$ отмечена в 4.1.7. Привлекая 5.2.6, видим, что $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ и $\mathscr{U}_{\mathfrak{N}}$ хаусдорфовы.

$\Leftarrow$: Переходя, если нужно, к эквивалентной мультинорме, будем считать, что пространство счетнонормировано и хаусдорфово: $\mathfrak{M} := \{p_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ и $\mathfrak{M}$ — хаусдорфова мультинорма.

Для $x_1,\ x_2 \in X$ положим

$$d(x_1,\ x_2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_1 - x_2)}{1 + p_k(x_1 - x_2)}$$

(ряд в правой части этой формулы мажорируется сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$, так что определение d корректно).

Проверим, что d — это метрика. Достаточно убедиться лишь в справедливости неравенства треугольника. Прежде всего, положим $\alpha(t) := t(1+t)^{-1}$ $(t \in \mathbb{R}_+)$. Ясно, что $\alpha'(t) = (1+t)^{-2} > 0$.

Стало быть, функция α возрастает. При этом α субаддитивна:

$$\alpha(t_1+t_2)=(t_1+t_2)(1+t_1+t_2)^{-1}=$$
$$=t_1(1+t_1+t_2)^{-1}+t_2(1+t_1+t_2)^{-1}\le t_1(1+t_1)^{-1}+t_2(1+t_2)^{-1}=$$
$$=\alpha(t_1)+\alpha(t_2).$$

Значит, для $x,\ y,\ z\in X$ выполнено

$$d(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\alpha(p_k(x-y))\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\alpha(p_k(x-z)+p_k(z-y))\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}(\alpha(p_k(x-z)+\alpha(p_k(z-y)))=d(x,\ z)+d(z,\ y).$$

Осталось установить совпадение $\mathscr{U}_d$ и $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$.

Проверим сначала, что $\mathscr{U}_d\subset\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$. Возьмем цилиндр $\{d\le\varepsilon\}$, и пусть $(x,\ y)\in\{d_{p_1}\le t\}\cap\ldots\cap\{d_{p_n}\le t\}$. Тогда с учетом монотонности α получаем

$$d(x,\ y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}\le$$
$$\le\frac{t}{1+t}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\le\frac{t}{1+t}+\frac{1}{2^n}.$$

Так как $t(1+t)^{-1}+2^{-n}$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$ и $t\to 0$, для подходящих t и n будет $(x,\ y)\in\{d\le\varepsilon\}$. Значит, $\{d\le\varepsilon\}\in\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$, что и нужно.

Установим теперь, что $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}}\subset\mathscr{U}_d$. Для этого следует при данных $p_n\in\mathfrak{M}$ и $t>0$ подыскать $\varepsilon>0$ так, чтобы $\{d_{p_n}\le t\}\supset\{d\le\varepsilon\}$. Очевидно, можно взять

$$\varepsilon:=\frac{1}{2^n}\frac{t}{1+t},$$

поскольку из соотношений

$$\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}\le d(x,\ y)\le\varepsilon=\frac{1}{2^n}\frac{t}{1+t}$$

для любых $x,\ y$ вытекает, что $p_n(x-y)\le t$. $\triangleright$

5.4.3. Определение. Множество V в мультинормированном пространстве $(X,\ \mathfrak{M})$ называют *ограниченным*, если $\sup p(V) < +\infty$ при всех $p \in \mathfrak{M}$, т. е. если числовое множество $p(V)$ ограничено сверху в $\mathbb{R}$ для каждой полунормы p из $\mathfrak{M}$.

5.4.4. *Для множества V в $(X,\ \mathfrak{M})$ эквивалентны утверждения:*

(1) *V — ограничено;*

(2) *для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в V и последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{F}$ такой, что $\lambda_n \to 0$, выполнено $\lambda_n x_n \to 0$ (т. е. $p(\lambda_n x_n) \to 0$ для всякой полунормы $p \in \mathfrak{M}$);*

(3) *V поглощается каждой окрестностью нуля.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): $p(\lambda_n x_n) \le |\lambda_n| p(x_n) \le |\lambda_n| \sup p(V) \to 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $U \in \tau_X(0)$ и не верно, что U поглощает V. По определению 3.4.9 это значит, что $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists x_n \in V)\ x_n \notin nU$. Таким образом, $1/n\, x_n \notin U$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $(1/n\, x_n)$ не стремится к нулю.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть $p \in \mathfrak{M}$. Найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $V \subset nB_p$. Ясно, что $\sup p(V) \le \sup p(nB_p) = n < +\infty$. $\rhd$

5.4.5. ***Критерий Колмогорова.*** *Мультинормированное пространство нормируемо в том и только в том случае, если оно хаусдорфово и имеет ограниченную окрестность нуля.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Очевидно.

$\Leftarrow$: Пусть V — ограниченная окрестность нуля. Не нарушая общности, можно считать, что $V = B_p$ для некоторой полунормы p из исходной мультинормы $\mathfrak{M}$. Несомненно, что $p \prec \mathfrak{M}$. Если теперь $U \in \tau_{\mathfrak{M}}(0)$, то $nU \supset V$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $U \in \tau_p(0)$. Привлекая теорему 5.3.2, видим, что $p \succ \mathfrak{M}$. Таким образом, $p \sim \mathfrak{M}$ и, стало быть, в силу 5.2.12, p также хаусдорфова полунорма. Последнее означает, что p — норма. $\rhd$

5.4.6. Замечание. Попутно в 5.4.5 установлено, что наличие ограниченной окрестности нуля в мультинормированном пространстве равносильно его полунормируемости.

5.5. Банаховы пространства

5.5.1. Определение. Полное нормированное пространство называют *банаховым*.