5.4.3. Определение. Множество V в мультинормированном пространстве $(X,\ \mathfrak{M})$ называют *ограниченным*, если $\sup p(V) < +\infty$ при всех $p \in \mathfrak{M}$, т. е. если числовое множество $p(V)$ ограничено сверху в $\mathbb{R}$ для каждой полунормы p из $\mathfrak{M}$.

5.4.4. *Для множества V в $(X,\ \mathfrak{M})$ эквивалентны утверждения:*

(1) *V — ограничено;*

(2) *для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в V и последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{F}$ такой, что $\lambda_n \to 0$, выполнено $\lambda_n x_n \to 0$ (т. е. $p(\lambda_n x_n) \to 0$ для всякой полунормы $p \in \mathfrak{M}$);*

(3) *V поглощается каждой окрестностью нуля.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): $p(\lambda_n x_n) \le |\lambda_n| p(x_n) \le |\lambda_n| \sup p(V) \to 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $U \in \tau_X(0)$ и не верно, что U поглощает V. По определению 3.4.9 это значит, что $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists x_n \in V)\ x_n \notin nU$. Таким образом, $1/n\, x_n \notin U$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $(1/n\, x_n)$ не стремится к нулю.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть $p \in \mathfrak{M}$. Найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $V \subset nB_p$. Ясно, что $\sup p(V) \le \sup p(nB_p) = n < +\infty$. $\triangleright$

5.4.5. ***Критерий Колмогорова.*** *Мультинормированное пространство нормируемо в том и только в том случае, если оно хаусдорфово и имеет ограниченную окрестность нуля.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Очевидно.

$\Leftarrow$: Пусть V — ограниченная окрестность нуля. Не нарушая общности, можно считать, что $V = B_p$ для некоторой полунормы p из исходной мультинормы $\mathfrak{M}$. Несомненно, что $p \prec \mathfrak{M}$. Если теперь $U \in \tau_{\mathfrak{M}}(0)$, то $nU \supset V$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $U \in \tau_p(0)$. Привлекая теорему 5.3.2, видим, что $p \succ \mathfrak{M}$. Таким образом, $p \sim \mathfrak{M}$ и, стало быть, в силу 5.2.12, p также хаусдорфова полунорма. Последнее означает, что p — норма. $\triangleright$

5.4.6. Замечание. Попутно в 5.4.5 установлено, что наличие ограниченной окрестности нуля в мультинормированном пространстве равносильно его полунормируемости.

5.5. Банаховы пространства

5.5.1. Определение. Полное нормированное пространство называют *банаховым*.

5.5.2. Замечание. Непосредственным расширением класса банаховых пространств служат полные метризуемые мультинормированные пространства — *пространства Фреше.* Можно сказать, что пространства Фреше составляют наименьший класс, содержащий банаховы пространства и замкнутый относительно образования счетных произведений. $\triangleleft\triangleright$

5.5.3. *Нормированное пространство является банаховым в том и только в том случае, если любой абсолютно (= нормально) сходящийся ряд в нем сходится.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < +\infty$ для некоторой счетной последовательности (x_n). Тогда последовательность частичных сумм $s_n := x_1 + \ldots + x_n$ фундаментальна, ибо при $m > k$ справедливы соотношения

$$\|s_m - s_k\| = \left\|\sum_{n=k+1}^{m} x_n\right\| \leq \sum_{n=k+1}^{m}\|x_n\| \to 0.$$

$\Leftarrow$: Пусть (x_n) — счетная фундаментальная последовательность. Выберем возрастающую последовательность $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такую, чтобы было $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ при $n,\ m \geq n_k$. Тогда ряд $x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \ldots$ абсолютно сходится к некоторой сумме x, т. е. $x_{n_k} \to x$. Видно, что одновременно с этим $x_n \to x$. $\triangleright$

5.5.4. *Пусть X — банахово пространство и X_0 — замкнутое подпространство в X. Тогда фактор-пространство X/X_0 банахово.*

$\triangleleft$ Пусть $\varphi : X \to \mathscr{X} := X/X_0$ — соответствующее каноническое отображение. Несомненно, что для каждого элемента $\overline{x} \in \mathscr{X}$ существует элемент $x \in \varphi^{-1}(\overline{x})$ такой, что $2\|\overline{x}\| \geq \|x\| \geq \|\overline{x}\|$. Значит, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{x}_n$, абсолютно сходящегося в $\mathscr{X}$, можно выбрать $x_n \in \varphi^{-1}(\overline{x}_n)$, обеспечив сходимость ряда норм $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$. На основании 5.5.3 имеется сумма $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Пусть $\overline{x} := \varphi(x)$. Тогда

$$\left\|\overline{x} - \sum_{k=1}^{n}\overline{x}_k\right\| \leq \left\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \to 0.$$

Вновь апеллируя к 5.5.3, выводим, что $\mathscr{X}$ банахово. $\triangleright$

5.5.5. Замечание. Понятно, что 5.5.3 можно перенести на полунормированные пространства. В частности, *если $(X,\ p)$ — полное полунормированное пространство, то фактор-пространство $X/\ker p$ банахово.* $\triangleleft\triangleright$

5.5.6. Теорема. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $X \neq 0$. Пространство ограниченных операторов $B(X, Y)$ является банаховым в том и только в том случае, если Y банахово.*

$\lhd$ $\Leftarrow$: Пусть (T_n) — последовательность Коши в $B(X, Y)$. По нормативному неравенству для всех $x \in X$ выполнено $\|T_m x - T_k x\| \leq \|T_m - T_k\| \, \|x\| \to 0$, т. е. $(T_n x)$ — фундаментальная последовательность в Y. Таким образом, есть предел $Tx := \lim T_n x$. Бесспорно, что возникающее отображение T — линейный оператор. В силу оценки $|\|T_m\| - \|T_k\|| \leq \|T_m - T_k\|$ последовательность $(\|T_n\|)$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, потому и ограничена, т. е. $\sup_n \|T_n\| < +\infty$. Отсюда, переходя к пределу в неравенстве $\|T_n x\| \leq \sup_n \|T_n\| \, \|x\|$, получаем: $\|T\| < +\infty$. Осталось проверить, что $\|T_n - T\| \to 0$. Возьмем для заданного $\varepsilon > 0$ номер n_0 так, чтобы было $\|T_m - T_n\| \leq \varepsilon/2$ при $m,\ n \geq n_0$. Помимо этого, для $x \in B_X$ подберем $m \geq n_0$, для которого $\|T_m x - Tx\| \leq \varepsilon/2$. Тогда $\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x - T_m x\| + \|T_m x - Tx\| \leq \|T_n - T_m\| + \|T_m x - Tx\| \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Значит, $\|T_n - T\| = \sup\{\|T_n x - Tx\| : \ x \in B_X\} \leq \varepsilon$ при достаточно больших n.

$\Rightarrow$: Пусть (y_n) — последовательность Коши в Y. По условию существует элемент $x \in X$ с нормой $\|x\| = 1$. Привлекая 3.5.6 и 3.5.2 (1), подыщем элемент $x' \in |\partial|(\|\cdot\|)$, для которого $(x,\ x') = \|x\| = 1$. Очевидно, что одномерный оператор $T_n := x' \otimes y_n : x \mapsto (x,\ x')y_n$ входит в $B(X, Y)$, ибо $\|T_n\| = \|x'\| \, \|y_n\|$. Значит, $\|T_m - T_k\| = \|x' \otimes (y_m - y_k)\| = \|x'\| \, \|y_m - y_k\| = \|y_m - y_k\|$, т. е. (T_n) — фундаментальная последовательность в $B(X, Y)$. Обозначим $T := \lim T_n$. Тогда $\|Tx - T_n x\| = \|Tx - y_n\| \leq \|T - T_n\| \, \|x\| \to 0$. Иначе говоря, Tx — предел (y_n) в Y. $\rhd$

5.5.7. Следствие. *Сопряженное пространство (с сопряженной нормой) банахово.* $\lhd\rhd$

5.5.8. Следствие. *Пусть X — нормированное пространство, $\iota : \ X \to X''$ — двойное штрихование, осуществляющее каноническое вложение X во второе сопряженное пространство X''. Тогда замыкание $\operatorname{cl} \iota(X)$ — пополнение X.*

$\lhd$ В силу 5.5.7, X'' — банахово пространство. По 5.1.10 (8) отображение ι — это изометрия X в X''. Осталось сослаться на 4.5.16. $\rhd$

5.5.9. Примеры.

(1) «Абстрактные» примеры: основное поле, замкнутое подпространство банахова пространства, произведение банаховых пространств, 5.5.4–5.5.8.

(2) Пусть $\mathscr{E}$ — непустое множество. Для $x \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$ положим $\|x\|_\infty := \sup|x(\mathscr{E})|$. Пространство $l_\infty(\mathscr{E}) := l_\infty(\mathscr{E}, \mathbb{F}) := \operatorname{dom}\|\cdot\|_\infty$ называют ***пространством ограниченных функций на*** $\mathscr{E}$. Используют и такие обозначения: $B(\mathscr{E})$ или $B(\mathscr{E}, \mathbb{F})$. При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ полагают $m := l_\infty := l_\infty(\mathscr{E})$.

(3) Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в $\mathscr{E}$. По определению считают $x \in c(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \Leftrightarrow (x \in l_\infty(\mathscr{E})$ и $x(\mathscr{F})$ — фильтр Коши в $\mathbb{F})$.

В случае, когда $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ и $\mathscr{F}$ — фильтр дополнений конечных множеств в $\mathbb{N}$, пишут $c := c(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ и говорят о *пространстве сходящихся последовательностей.* В $c(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ рассматривают подпространство $c_0(\mathscr{E}, \mathscr{F}) := \{x \in c(\mathscr{E}, \mathscr{F}) : x(\mathscr{F}) \to 0\}$.

Если $\mathscr{F}$ — фильтр дополнений конечных множеств в бесконечном $\mathscr{E}$, то применяют сокращенную запись $c_0(\mathscr{E}) := c_0(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ и говорят о *пространстве функций, исчезающих на бесконечности.* При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ пишут просто $c_0 := c_0(\mathscr{E})$. Пространство c_0 называют *пространством сходящихся к нулю последовательностей.* Следует помнить, что все эти пространства без особых оговорок наделяют нормой, взятой из соответствующего пространства $l_\infty(\mathscr{E}, \mathscr{F})$.

(4) Пусть $S := (\mathscr{E}, X, \int)$ — система с интегрированием. Таким образом, X — векторная решетка в $\mathbb{R}^{\mathscr{E}}$, причем решеточные операции в X и $\mathbb{R}^{\mathscr{E}}$ совпадают, а $\int : X \to \mathbb{R}$ — (*пред*)*интеграл*, т. е. $\int \in X_+^{\#}$ и $\int x_n \downarrow 0$, как только $x_n \in X$ и $x_n(e) \downarrow 0$ для $e \in \mathscr{E}$. Пусть, далее, $f \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$ — измеримое (относительно S) отображение (можно, как это обычно и принято, говорить о почти везде конечных почти везде определенных измеримых функциях).

Положим $\mathscr{N}_p(f) := (\int |f|^p)^{1/p}$ для $p \geq 1$, где $\int$ — соответствующее лебегово расширение исходного интеграла $\int$ (использование единого символа — традиционная вольность).

Элементы $\operatorname{dom}\mathscr{N}_1$ называют *интегрируемыми* или *суммируемыми* функциями.

Интегрируемость $f \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$ равносильна интегрируемости ее вещественной и мнимой частей $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f \in \mathbb{R}^{\mathscr{E}}$. Для полноты напомним, что $\mathscr{N}_1(f) = N(f)$, где

$$N(g) :=$$

$$:= \inf\left\{\sup \int x_n : (x_n) \subset X,\ x_n \le x_{n+1},\ (\forall\, e \in \mathscr{E})\ |g(e)| = \lim_n\ x_n(e)\right\}$$

для произвольной $g \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$. При $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ясно, что $\operatorname{dom} \mathscr{N}_1$ представляет замыкание X в полунормированном пространстве $(\operatorname{dom} N,\ N)$.

Имеет место неравенство Гёльдера

$$\mathscr{N}_1(fg) \le \mathscr{N}_p(f)\mathscr{N}_{p'}(g) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ p > 1\right).$$

$\lhd$ Это неравенство есть следствие *неравенства Юнга*:

$$xy - \frac{x^p}{p} \le \frac{y^{p'}}{p'} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}_+),$$

примененного к $|f|/\mathscr{N}_p(f)$ и $|g|/\mathscr{N}_{p'}(g)$ в случае, когда $\mathscr{N}_p(f)$ и $\mathscr{N}_{p'}(g)$ не равны нулю одновременно. При $\mathscr{N}_p(f)\mathscr{N}_{p'}(g) = 0$ неравенство Гёльдера несомненно. $\rhd$

Множество $\mathscr{L}_p := \operatorname{dom} \mathscr{N}_p$ *является векторным пространством.*

$$\lhd\ |f+g|^p \le (|f|+|g|)^p \le 2^p(|f| \vee |g|)^p = 2^p(|f|^p \vee |g|^p) \le 2^p(|f|^p+|g|^p)\ \rhd$$

Функция $\mathscr{N}_p$ *— полунорма, ибо для нее справедливо неравенство Минковского*

$$\mathscr{N}_p(f+g) \le \mathscr{N}_p(f) + \mathscr{N}_p(g).$$

$\lhd$ При $p = 1$ неравенство Минковского несомненно. При $p > 1$ неравенство Минковского следует из представления

$$\mathscr{N}_p(f) = \sup\{\mathscr{N}_1(fg)/\mathscr{N}_{p'}(g) :\ 0 < \mathscr{N}_{p'}(g) < +\infty\} \quad (f \in \mathscr{L}_p),$$

в правой части которого стоит верхняя огибающая семейства полунорм.

Для доказательства нужного представления в силу неравенства Гёльдера достаточно заметить, что при $\mathscr{N}_p(f) > 0$ для $g := |f|^{p/p'}$ выполнено $g \in \mathscr{L}_{p'}$ и, кроме того, $\mathscr{N}_p(f) = \mathscr{N}_1(fg)/\mathscr{N}_{p'}(g)$.

В самом деле, $\mathscr{N}_1(fg) = \int |f|^{p/p'+1} = \mathscr{N}_p(f)^p$, ибо $p/p' + 1 = p(1 - 1/p) + 1 = p$. Помимо этого, $\mathscr{N}_{p'}(g)^{p'} = \int |g|^{p'} = \int |f|^p = \mathscr{N}_p(f)^p$, так что $\mathscr{N}_{p'}(g) = \mathscr{N}_p(f)^{p/p'}$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\mathscr{N}_1(fg)/\mathscr{N}_{p'}(g) = \mathscr{N}_p(f)^p/\mathscr{N}_p(f)^{p/p'} = \\ = \mathscr{N}_p(f)^{p-p/p'} = \mathscr{N}_p(f)^{p(1-1/p')} = \mathscr{N}_p(f),\end{aligned}$$

что и завершает доказательство. $\rhd$

Элементы $\operatorname{dom}\mathscr{N}_1$ называют *интегрируемыми* или *суммируемыми* функциями. Интегрируемость $f \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$ равносильна интегрируемости вещественной и мнимой частей $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f \in \mathbb{R}^{\mathscr{E}}$. Ради полноты, напомним, что

$$N(g) := \\ := \inf\left\{\sup_n \int x_n : (x_n) \subset X,\ x_n \le x_{n+1},\ (\forall e \in \mathscr{E})\ |g(e)| \le \lim_n x_n(e)\right\}$$

для произвольного $g \in \mathbb{F}^{\mathscr{E}}$. Если $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, то $\operatorname{dom}\mathscr{N}_1$, очевидно, представляет собой замыкание X в нормированном пространстве $(\operatorname{dom} N,\ N)$.

Фактор-пространство $\mathscr{L}_p/\ker\mathscr{N}_p$, наделенное соответствующей фактор-нормой $\|\cdot\|_p$, называют *пространством функций, суммируемых* (*вместе*) *с p-той степенью*, или пространством p-суммируемых функций и обозначают L_p. Конечно, используют и более развернутые символы типа $L_p(S)$, $L_p(\mathscr{E},\ X,\ \int)$ и т. п.

Наконец, если система с интегрируемостью S возникает из рассмотрения ступенчатых измеримых функций на *пространстве с мерой* $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mu)$, то пишут $L_p(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mu)$, $L_p(\Omega,\ \mu)$ и даже $L_p(\mu)$, где остальные параметры рассматриваемой ситуации ясны из контекста.

Теорема Рисса — Фишера. *Пространство L_p является банаховым.*

$\lhd$ Наметим доказательство. Возьмем какой-либо абсолютно сходящийся ряд $t := \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_p(f_k)$, где $f_k \in \mathscr{L}_p$. Положим $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ и $s_n := \sum_{k=1}^{n} |f_k|$. Видно, что последовательность (s_n) состоит из положительных функций и является возрастающей. Это же верно для последовательности (s_n^p). Более того, $\int s_n^p \le t^p < +\infty$. По теореме Леви о монотонной сходимости почти для каждого $e \in \mathscr{E}$ предел $g(e) := \lim s_n^p(e)$ конечен и можно считать, что возникающая функция g лежит в $\mathscr{L}_1$. Полагая $h(e) := g^{1/p}(e)$, видим, что $h \in \mathscr{L}_p$ и $s_n(e) \to h(e)$ почти при всех $e \in \mathscr{E}$. Из неравенств $|\sigma_n| \le s_n \le h$ вытекает, что почти для любого $e \in \mathscr{E}$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(e)$. Для суммы $f_0(e)$ будет $|f_0(e)| \le h(e)$, и, стало быть, можно считать, что $f_0 \in \mathscr{L}_p$. Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости (= о предельном переходе), заключаем: $\mathscr{N}_p(\sigma_n - f_0) = \left(\int |\sigma_n - f_0|^p\right)^{1/p} \to 0$. Итак, абсолютно сходящийся ряд в полунормированном пространстве $(\mathscr{L}_p,\ \mathscr{N}_p)$ сходится. Остается сослаться на 5.5.3–5.5.5. $\triangleright$

Если система S — это «обычное суммирование» на $\mathscr{E}$, т. е. в случае, когда $X := \sum_{e \in \mathscr{E}} \mathbb{R}$ — прямая сумма основных полей $\mathbb{R}$ и $\int x := \sum_{e \in \mathscr{E}} x(e)$, пространство L_p состоит из *семейств, суммируемых с p-той степенью*. Это пространство обозначают $l_p(\mathscr{E})$. При этом $\|x\|_p := \left(\sum_{e \in \mathscr{E}} |x(e)|^p\right)^{1/p}$. При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ пишут просто l_p и говорят о *пространстве последовательностей, суммируемых с p-той степенью*.

(5) Пространство L_∞ определяют на основе следующей конструкции. Пусть X — упорядоченное векторное пространство и $e \in X_+$ — положительный элемент. *Полунормой p_e, ассоциированной с e*, называют функционал Минковского промежутка $[-e,\ e]$, т. е.

$$p_e(x) := \inf\{t > 0 :\ -te \le x \le te\}.$$

Пространство X_e, совпадающее с эффективной областью определения $\operatorname{dom} p_e$, называют *пространством ограниченных по отношению к e элементов*, а сам элемент e — *сильной единицей* в X_e. Элементы ядра $\ker p_e$ называют *неархимедовыми* (по отношению к e).

Фактор-пространство $X_e / \ker p_e$ наделяют фактор-полунормой и называют *нормированным пространством ограниченных элементов, порожденным e (в X)*. Так, пространство $C(Q,\ \mathbb{R})$ непрерывных вещественных функций на непустом компакте Q есть нормированное пространство ограниченных элементов, порожденное функцией $\mathbf{1} := \mathbf{1}_Q : q \mapsto 1$ $(q \in Q)$ (в себе). В пространстве $\mathbb{R}^{\mathscr{E}}$ та же функция $\mathbf{1}$ порождает пространство $l_\infty(\mathscr{E})$.

Для системы с интегрированием $S := \left(\mathscr{E},\ X,\ \int\right)$ в предположении измеримости $\mathbf{1}$ рассматривают пространство таких измеримых функций из $\mathscr{E}$ в $\mathbb{F}$, что

$$\mathscr{N}_\infty(f) := \inf\{t > 0 : \ |f| \leq t\mathbf{1}\} < +\infty,$$

где $\leq$ означает «меньше почти везде». Это пространство называют пространством *существенно ограниченных функций* и обозначают $\mathscr{L}_\infty$.

Фактор-пространство $\mathscr{L}_\infty / \ker \mathscr{N}_\infty$ обозначают L_∞, а норму в нем — $\| \cdot \|_\infty$. Элементы L_∞, допуская вольность речи, называют (как и элементы $\mathscr{L}_\infty$) существенно ограниченными функциями. Пространство L_∞ является банаховым. $\lhd\rhd$

Пространству L_∞, так же, как и пространствам $C(Q,\ \mathbb{F}), l_p(\mathscr{E})$, $c_0(\mathscr{E})$, c, l_p, L_p $(p \geq 1)$, присвоено название «классическое банахово пространство». В последнее время к числу классических относят также *пространства Линденштраусса*, т. е. пространства, сопряженные к которым изометричны L_1 (относительно какой-нибудь системы с интегрированием). Можно показать, что банахово пространство X является классическим в том и только в том случае, если сопряженное пространство X' изометрично одному из пространств L_p при $p \geq 1$.

(6) Пусть $S := \left(\mathscr{E},\ X,\ \int\right)$ — система с интегрированием и $p \geq 1$. Допустим, что для каждого $e \in \mathscr{E}$ имеется банахово пространство $(Y_e,\ \| \cdot \|_{Y_e})$. Возьмем любой элемент $f \in \prod_{e \in \mathscr{E}} Y_e$ и положим $|\!|\!| f |\!|\!| : e \mapsto \|f(e)\|_{Y_e}$. Пусть, далее, $N_p(f) := \inf\{\mathscr{N}_p(g) : \ g \in \mathscr{L}_p,\ g \geq |\!|\!| f |\!|\!|\}$. Ясно, что $\operatorname{dom} N_p$ — векторное пространство с полунормой N_p. Фактор-пространство $\operatorname{dom} N_p / \ker N_p$ с соответствующей нормой $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_p$ называют *суммой семейства* $(Y_e)_{e \in \mathscr{E}}$ *по типу* p (точнее, по типу L_p в системе с интегрированием S).

Сумма по типу p семейства пространств — банахово пространство.

$\lhd$ Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} N_p(f_k) < +\infty$. Тогда последовательность частичных сумм $(s_n := \sum_{k=1}^{n} |\!|\!| f_k |\!|\!|)$ сходится к некоторой почти везде конечной положительной функции g и $N_p(g) < +\infty$. Отсюда видно, что почти для каждого $e \in \mathscr{E}$ сходится последовательность $(s_n(e))$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(e)\|_{Y_e}$. Из-за полноты Y_e получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(e)$ сходится к некоторой сумме $f_0(e)$ в Y_e почти при любом $e \in \mathscr{E}$. Поскольку $\|f_0(e)\|_{Y_e} \leq g(e)$ почти при всех $e \in \mathscr{E}$, можно считать, что $f_0 \in \operatorname{dom} N_p$. Наконец, $N_p\left(\sum_{k=1}^{n} f_k - f_0\right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} N_p(f_k) \to 0$. $\rhd$

В случае $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ и «обычного суммирования» сумму $\mathfrak{Y}$ последовательности банаховых пространств $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ часто обозначают

$$\mathfrak{Y} := (Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots)_p,$$

где p — тип суммирования. Элемент $\overline{y}$ пространства $\mathfrak{Y}$ — это последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $y_n \in Y_n$ и

$$\|\overline{y}\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_n\|_{Y_n}^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

В случае, когда $Y_e := \mathfrak{X}$ при любом $e \in \mathscr{E}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторое банахово пространство над $\mathbb{F}$, полагают $\mathscr{F}_p := \operatorname{dom} N_p$ и $F_p := \mathscr{F}_p / \ker N_p$. Элементы полученных пространств называют *векторными полями* или *$\mathfrak{X}$-значными функциями* на $\mathscr{E}$ (с нормами, суммируемыми с p-той степенью). Несомненно, что пространство F_p является банаховым. В то же время если в исходной системе с интегрированием есть неизмеримое множество, то пространство F_p содержит чересчур много элементов (так, для обычной лебеговой системы с интегрированием $F_p \neq L_p$). В этой связи в пространстве $\mathscr{F}_p$ выделяют функции с конечными множествами значений, каждое из которых принимается на измеримом множестве. Такие элементы, ра́вно как и отвечающие им классы в F_p, называют *простыми*, *конечнозначными*, *ступенчатыми* или *размещенными функциями*. Замыкание множества простых функций в F_p обозначают L_p (более развернуто: $L_p(\mathfrak{X})$, $L_p(S,\ \mathfrak{X})$, $L_p(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mu)$, $L_p(\Omega,\ \mu)$ и т. п.) и называют *пространством $\mathfrak{X}$-значных функций, суммируемых с p-той степенью*, или же пространством p-суммируемых $\mathfrak{X}$-значных функций. Ясно, что $L_p(\mathfrak{X})$ — банахово пространство.

Проиллюстрируем одно из достоинств этих пространств в случае $p = 1$. Заметим прежде всего, что простую функцию f можно записать в виде «конечной комбинации характеристических функций»:

$$f = \sum_{x\in \operatorname{im} f} \chi_{f^{-1}(x)} x,$$

где множество $f^{-1}(x)$ измеримо при $x \in \operatorname{im} f$. Более того,

$$\int \|f\| = \int \sum_{x\in \operatorname{im} f} \|\chi_{f^{-1}(x)} x\| =$$

$$= \int \sum_{x \in \operatorname{im} f} \chi_{f^{-1}(x)} \|x\| = \sum_{x \in \operatorname{im} f} \|x\| \int \chi_{f^{-1}(x)} < +\infty.$$

Каждой простой функции f сопоставим элемент в $\mathfrak{X}$ по правилу:

$$\int f := \sum_{x \in \operatorname{im} f} \int \chi_{f^{-1}(x)} x.$$

Проверка показывает, что возникающий интеграл $\int$, определенный на подпространстве простых функций, линеен. Более того, он ограничен, ибо

$$\left\| \int f \right\| = \left\| \sum_{x \in \operatorname{im} f} \int \chi_{f^{-1}(x)} x \right\| \le \sum_{x \in \operatorname{im} f} \int \chi_{f^{-1}(x)} \|x\| =$$

$$= \int \sum_{x \in \operatorname{im} f} \|x\| \chi_{f^{-1}(x)} = \int \|f\|.$$

В силу 4.5.10 и 5.3.8 оператор $\int$ допускает единственное продолжение до элемента пространства $B(L_1(\mathfrak{X}),\ \mathfrak{X})$. Этот элемент обозначают тем же символом $\int$ (или $\int_{\mathscr{E}}$ и т. п.) и называют *интегралом Бохнера.*

(7) В случае «обычного суммирования» приняты те же соглашения, что и в скалярной теории. Именно, вместо интегралов суммируемых функций говорят о *суммах суммируемых семейств* и используют соответствующие стандартные знаки. При этом бесконечномерность порождает свои проблемы.

Пусть (x_n) — семейство элементов банахова пространства. Его суммируемость означает суммируемость (в смысле интеграла Бохнера) числового семейства $(\|x_n\|)$, т. е. абсолютную сходимость (x_n). Тем самым среди (x_n) лишь счетное число ненулевых элементов и (x_n) можно считать (счетной) последовательностью. При этом $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ (= ряд $x_1 + x_2 + \ldots$ абсолютно сходится). С учетом 5.5.3 для суммы ряда $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ выполнено: $x = \lim_{\theta} s_{\theta}$, где $s_{\theta} := \sum_{n \in \theta} x_n$ — (соответствующая θ) частичная сумма, а θ пробегает направление конечных подмножеств $\mathbb{N}$. В последней ситуации x изредка называют *неупорядоченной суммой* ряда (x_n), а последовательность (x_n) — *неупорядоченно суммируемой к* x (пишут: $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$). В этих терминах заключаем: суммируемость влечет неупорядоченную суммируемость (к той же сумме). При $\dim X < +\infty$ верно и обратное утверждение (= теорема Римана о рядах). Общий случай разъясняет следующий глубокий факт.

Теорема Дворецкого — Роджерса. *В каждом бесконечномерном банаховом пространстве X для любой последовательности положительных чисел (t_n) такой, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 < +\infty$, существует неупорядоченно суммируемая последовательность элементов (x_n), у которой $\|x_n\| = t_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

В этой связи для семейства элементов произвольного мультинормированного пространства $(X, \mathfrak{M})$ принимают следующую терминологию. Говорят, что *семейство $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ суммируемо* или *безусловно суммируемо* (к сумме x) и пишут $x := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e$ при условии, что x является пределом в $(X, \mathfrak{M})$ соответствующей сети частичных сумм (s_θ), где θ — конечное подмножество $\mathscr{E}$, т. е. $s_\theta \to x$ в $(X, \mathfrak{M})$. Если для каждого p существует сумма $\sum_{e\in\mathscr{E}} p(x_e)$, то говорят, что семейство $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ *абсолютно суммируемо* (или, что более правильно, *фундаментально суммируемо*, или даже *абсолютно фундаментально*).

Пусть в заключение $\mathfrak{Y}$ — еще одно банахово пространство и $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Оператор T естественным способом распространяют до оператора из $L_1(\mathfrak{X})$ в $L_1(\mathfrak{Y})$, полагая для простой $\mathfrak{X}$-значной функции f, что $Tf : e \mapsto Tf(e)$ при $e \in \mathscr{E}$. Тогда для $f \in L_1(\mathfrak{X})$ будет $Tf \in L_1(\mathfrak{Y})$ и $\int_{\mathscr{E}} Tf = T\int_{\mathscr{E}} f$. Последний факт выражают словами: «интеграл Бохнера коммутирует с ограниченными операторами». $\lhd\rhd$

5.6. Алгебра ограниченных операторов

5.6.1. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, а $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $S \in \mathscr{L}(Y, Z)$ — линейные операторы. Тогда $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$, т. е. операторная норма является субмультипликативной.*

$\lhd$ В силу нормативных неравенств для $x \in X$ выполнено

$$\|STx\| \le \|S\|\,\|Tx\| \le \|S\|\,\|T\|\,\|x\|. \ \rhd$$

5.6.2. Замечание. В алгебре, в частности, изучают (ассоциативные) *алгебры* над $\mathbb{F}$. Так называют векторное пространство A над $\mathbb{F}$, в котором имеется (ассоциативное) умножение элементов $\circ : (a, b) \mapsto ab$ $(a, b \in A)$. Предполагается, что умножение $\circ$ дистрибутивно относительно сложения (т. е. $(A, +, \circ)$ — это (ассоциативное) *кольцо*) и, кроме того, что операция $\circ$ *согласована с умножением на скаляр* в том смысле, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ при всех $a, b \in A$