Теорема Дворецкого — Роджерса. *В каждом бесконечномерном банаховом пространстве X для любой последовательности положительных чисел (t_n) такой, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 < +\infty$, существует неупорядоченно суммируемая последовательность элементов (x_n), у которой $\|x_n\| = t_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

В этой связи для семейства элементов произвольного мультинормированного пространства $(X,\ \mathfrak{M})$ принимают следующую терминологию. Говорят, что *семейство* $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ *суммируемо* или *безусловно суммируемо* (к сумме x) и пишут $x := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e$ при условии, что x является пределом в $(X,\ \mathfrak{M})$ соответствующей сети частичных сумм (s_θ), где θ — конечное подмножество $\mathscr{E}$, т. е. $s_\theta \to x$ в $(X,\ \mathfrak{M})$. Если для каждого p существует сумма $\sum_{e\in\mathscr{E}} p(x_e)$, то говорят, что семейство $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ *абсолютно суммируемо* (или, что более правильно, *фундаментально суммируемо*, или даже *абсолютно фундаментально*).

Пусть в заключение $\mathfrak{Y}$ — еще одно банахово пространство и $T \in B(\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y})$. Оператор T естественным способом распространяют до оператора из $L_1(\mathfrak{X})$ в $L_1(\mathfrak{Y})$, полагая для простой $\mathfrak{X}$-значной функции f, что $Tf : e \mapsto Tf(e)$ при $e \in \mathscr{E}$. Тогда для $f \in L_1(\mathfrak{X})$ будет $Tf \in L_1(\mathfrak{Y})$ и $\int_{\mathscr{E}} Tf = T\int_{\mathscr{E}} f$. Последний факт выражают словами: «интеграл Бохнера коммутирует с ограниченными операторами». $\lhd\rhd$

5.6. Алгебра ограниченных операторов

5.6.1. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, а $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ и $S \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$ — линейные операторы. Тогда $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$, т. е. операторная норма является субмультипликативной.*

$\lhd$ В силу нормативных неравенств для $x \in X$ выполнено

$$\|STx\| \leq \|S\|\ \|Tx\| \leq \|S\|\ \|T\|\,\|x\|.\ \rhd$$

5.6.2. Замечание. В алгебре, в частности, изучают (ассоциативные) *алгебры* над $\mathbb{F}$. Так называют векторное пространство A над $\mathbb{F}$, в котором имеется (ассоциативное) умножение элементов $\circ : (a,\ b) \mapsto ab$ $(a,\ b \in A)$. Предполагается, что умножение $\circ$ дистрибутивно относительно сложения (т. е. $(A,\ +,\ \circ)$ — это (ассоциативное) *кольцо*) и, кроме того, что операция $\circ$ *согласована с умножением на скаляр* в том смысле, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ при всех $a,\ b \in A$

и $\lambda \in \mathbb{F}$. Иными словами, в более развернутом виде алгебра — это набор $(A,\ \mathbb{F},\ +,\ \cdot,\ \circ)$. В то же время, как и в других аналогичных ситуациях, говорят просто об алгебре A.

5.6.3. Определение. *Нормированная алгебра* (над основным полем) — это ассоциативная алгебра (над этим полем), наделенная субмультипликативной нормой. *Банахова алгебра* — это полная нормированная алгебра.

5.6.4. *Пусть $B(X) := B(X,\ X)$ — пространство ограниченных эндоморфизмов нормированного пространства X. Пространство $B(X)$ с операцией суперпозиции операторов в качестве умножения и с операторной нормой представляет собой нормированную алгебру. При $X \neq 0$ в $B(X)$ есть единичный элемент I_X и $\|I_X\| = 1$. Алгебра $B(X)$ является банаховой в том и только в том случае, если X — банахово пространство.*

$\lhd$ Если $X = 0$, то все очевидно. Если же $X \neq 0$, то нужно воспользоваться 5.5.6. $\rhd$

5.6.5. Замечание. В связи с 5.6.4 за элементом λI_X, где $\lambda \in \mathbb{F}$, удобно закрепить тот же самый символ λ. (В частности, $1 = I_0 = 0!$) При $X \neq 0$ описанную процедуру можно мыслить как отождествление основного поля $\mathbb{F}$ и одномерного подпространства $\mathbb{F}I_X$.

5.6.6. Определение. Пусть X — нормированное пространство и $T \in B(X)$. Число $r(T) := \inf\left\{\|T^n\|^{1/n}\ :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ называют *спектральным радиусом* T. (Естественность этого термина станет ясной несколько позже (ср. 8.1.12).)

5.6.7. $r(T) \leq \|T\|$.

$\lhd$ Действительно, в силу 5.6.1, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. $\rhd$

5.6.8. *Справедлива формула Гельфанда*

$$r(T) = \lim \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

$\lhd$ Пусть $\varepsilon > 0$ и $s \in \mathbb{N}$ таковы, что $\|T^s\| \leq (r(T) + \varepsilon)^s$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в случае $n \geq s$ имеется представление $n = k(n)s + l(n)$, где $k(n),\ l(n) \in \mathbb{N}$ и $0 \leq l(n) \leq s - 1$. Значит,

$$\|T^n\| = \|T^{k(n)s}T^{l(n)}\| \leq \|T^s\|^{k(n)}\,\|T^{l(n)}\| \leq$$

$$\leq \left(1 \vee \|T\| \vee \ldots \vee \|T^{s-1}\|\right) \|T^s\|^{k(n)} = M \, \|T^s\|^{k(n)}.$$

Следовательно,

$$r(T) \leq \|T^n\|^{1/n} \leq M^{1/n} \|T^s\|^{k(n)/n} \leq$$

$$\leq M^{1/n} (r(T) + \varepsilon)^{k(n)s/n} = M^{1/n} (r(T) + \varepsilon)^{(n - l(n))/n}.$$

Так как $M^{1/n} \to 1$ и $(n - l(n))/n \to 1$, то $r(T) \leq \limsup \|T^n\|^{1/n} \leq r(T) + \varepsilon$. Соотношение $\liminf \|T^n\|^{1/n} \geq r(T)$ очевидно. В силу произвольности ε получаем требуемое. $\triangleright$

5.6.9. *Теорема о сходимости ряда Неймана.* *Пусть X — банахово пространство и $T \in B(X)$. Эквивалентны утверждения:*

(1) *ряд Неймана $1 + T + T^2 + \ldots$ сходится в операторной норме пространства $B(X)$;*

(2) *$\|T^k\| < 1$ для некоторого k из $\mathbb{N}$;*

(3) *$r(T) < 1$.*

При выполнении одного из условий (1)–(3) будет $\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (1 - T)^{-1}$.

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Если ряд Неймана сходится, то общий член (T^k) стремится к нулю.

(2) $\Rightarrow$ (3): Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1): На основании 5.6.8 при подходящем $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ будет $r(T) \leq \|T^k\|^{1/k} \leq r(T) + \varepsilon < 1$. Иными словами, хвост ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\|$ мажорирован сходящимся рядом. Учитывая полноту $B(X)$ и критерий 5.5.3, заключаем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ сходится в пространстве $B(X)$.

Пусть теперь $S := \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ и $S_n := \sum_{k=0}^{n} T^k$. Тогда

$$S(1 - T) = \lim S_n (1 - T) = \lim \left(1 + T + \ldots + T^n\right)(1 - T) =$$

$$= \lim (1 - T^{n+1}) = 1;$$

$$(1 - T)S = \lim (1 - T) S_n = \lim (1 - T)(1 + T + \ldots + T^n) =$$

$$= \lim \left(1 - T^{n+1}\right) = 1,$$

ибо $T^n \to 0$. Итак, в силу 2.2.7, $S = (1 - T)^{-1}$. $\triangleright$

5.6.10. *Следствие.* *Если $\|T\| < 1$, то оператор $(1 - T)$ (непрерывно) обратим (= имеет ограниченный обратный), т. е. обратное соответствие — ограниченный линейный оператор. При этом $\|(1 - T)^{-1}\| \le (1 - \|T\|)^{-1}$.*

$\lhd$ Ряд Неймана сходится, причем

$$\|(1 - T)^{-1}\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = (1 - \|T\|)^{-1}. \ \rhd$$

5.6.11. *Следствие.* *Если $\|1 - T\| < 1$, то T обратим и*

$$\|1 - T^{-1}\| \le \frac{\|1 - T\|}{1 - \|1 - T\|}.$$

$\lhd$ По теореме 5.6.9,

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - T)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - T)^k = (1 - (1 - T))^{-1} = T^{-1}.$$

Отсюда выводим:

$$\|T^{-1} - 1\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (1 - T)^k \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|(1 - T)^k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|1 - T\|^k. \ \rhd$$

5.6.12. *Теорема Банаха об обратимых операторах.* *Пусть X и Y — банаховы пространства. Множество (непрерывно) обратимых операторов открыто. При этом операция обращения оператора $T \mapsto T^{-1}$ является непрерывным отображением.*

$\lhd$ Пусть операторы $S,\ T \in B(X,\ Y)$ таковы, что $T^{-1} \in B(Y,\ X)$ и, кроме того, $\|T^{-1}\|\,\|S - T\| \le 1/2$. Рассмотрим оператор $T^{-1}S \in B(X)$. Имеем

$$\|1 - T^{-1}S\| = \|T^{-1}T - T^{-1}S\| \le \|T^{-1}\|\,\|T - S\| \le \frac{1}{2} < 1.$$

В силу 5.6.11, $(T^{-1}S)^{-1}$ — это элемент $B(X)$.

Положим $R := (T^{-1}S)^{-1}T^{-1}$. Ясно, что $R \in B(Y,\ X)$ и, кроме того,

$$R = S^{-1}(T^{-1})^{-1}T^{-1} = S^{-1}.$$

Помимо этого,

$$\|S^{-1}\| - \|T^{-1}\| \le \|S^{-1} - T^{-1}\| =$$

$$= \|S^{-1}(T - S)T^{-1}\| \le \|S^{-1}\| \, \|T - S\| \, \|T^{-1}\| \le \frac{1}{2}\|S^{-1}\|.$$

Отсюда $\|S^{-1}\| \le 2\|T^{-1}\|$. Окончательно

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \le \|S^{-1}\| \, \|T - S\| \, \|T^{-1}\| \le 2\|T^{-1}\|^2\|T - S\|. \ \triangleright$$

5.6.13. Определение. Пусть X — банахово пространство над $\mathbb{F}$ и $T \in B(X)$. Скаляр $\lambda \in \mathbb{F}$ называют *регулярным* или *резольвентным значением* T, если $(\lambda - T)^{-1} \in B(X)$. При этом полагают $R(T,\ \lambda) := (\lambda - T)^{-1}$ и называют оператор $R(T,\ \lambda)$ *резольвентой* (оператора T в точке λ). Множество резольвентных значений обозначают $\operatorname{res}(T)$. Отображение $\lambda \mapsto R(T,\ \lambda)$ из $\operatorname{res}(T)$ в $B(X)$ также называют *резольвентой* оператора T. Множество $\mathbb{F} \setminus \operatorname{res}(T)$ называют *спектром* T и обозначают $\operatorname{Sp}(T)$ или $\sigma(T)$. Элементы спектра называют *спектральными значениями*.

5.6.14. Замечание. Если $X = 0$, то спектр единственного оператора $T = 0 \in B(X)$ равен пустому множеству. В этой связи в спектральном анализе молчаливо предполагают, что $X \ne 0$. В случае $X \ne 0$ при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ спектр также бывает пустым, а при $\mathbb{F} := \mathbb{C}$ — не бывает (ср. 8.1.11). $\triangleleft\triangleright$

5.6.15. *Множество* $\operatorname{res}(T)$ *открыто, причем если* $\lambda_0 \in \operatorname{res}(T)$, *то в некоторой окрестности* λ_0 *выполнено*

$$R(T,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda - \lambda_0)^k R(T,\ \lambda_0)^{k+1}.$$

Если $|\lambda| > \|T\|$, *то* $\lambda \in \operatorname{res}(T)$ *и имеет место разложение*

$$R(T,\ \lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k},$$

причем $\|R(T,\ \lambda)\| \to 0$ *при* $|\lambda| \to +\infty$.

$\lhd$ Поскольку $\|(\lambda - T) - (\lambda_0 - T)\| = |\lambda - \lambda_0|$, то открытость множества $\operatorname{res}(T)$ следует из 5.6.12. Кроме того,

$$\lambda - T = (\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - T) = (\lambda_0 - T)R(T,\ \lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - T) =$$

$$= (\lambda_0 - T)((\lambda - \lambda_0)R(T,\ \lambda_0) + 1) = (\lambda_0 - T)(1 - ((-1)(\lambda - \lambda_0)R(T,\ \lambda_0))).$$

Значит, в подходящей окрестности точки λ_0 в силу 5.6.9 будет

$$R(T,\ \lambda) = (\lambda - T)^{-1} =$$

$$= (1 - ((-1)(\lambda - \lambda_0)R(T,\ \lambda_0)))^{-1}(\lambda_0 - T)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda - \lambda_0)^k R(T,\ \lambda_0)^{k+1}.$$

На основании 5.6.9 при $|\lambda| > \|T\|$ имеется оператор $(1 - T/\lambda)^{-1}$, представляющий собой сумму ряда Неймана, т. е.

$$R(T,\ \lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k}.$$

Очевидно

$$\|R(T,\ \lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \|T\|/|\lambda|}. \ \rhd$$

5.6.16. *Спектр любого ограниченного оператора T компактен.*

5.6.17. Замечание. Полезно помнить, что неравенство $|\lambda| > r(T)$ представляет собой необходимое и достаточное условие сходимости ряда Лорана $R(T,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k/\lambda^{k+1}$, дающего разложение резольвенты в окрестности бесконечно удаленной точки (см. также 8.1.12).

5.6.18. *Оператор S коммутирует с оператором T в том и только в том случае, если S коммутирует с резольвентой T.*

$\lhd \Rightarrow$: $ST = TS \Rightarrow S(\lambda - T) = \lambda S - ST = \lambda S - TS = (\lambda - T)S \Rightarrow R(T,\ \lambda)S(\lambda - T) = S \Rightarrow R(T,\ \lambda)S = S\,R(T,\ \lambda)$ $(\lambda \in \operatorname{res}(T))$.

$\Leftarrow$: $SR(T,\ \lambda_0) = R(T,\ \lambda_0)S \Rightarrow S = R(T,\ \lambda_0)S(\lambda_0 - T) \Rightarrow (\lambda_0 - T)S = S(\lambda_0 - T) \Rightarrow TS = ST$. $\rhd$

5.6.19. *Если* $\lambda,\ \mu \in \operatorname{res}(T)$, *то имеет место первое резольвентное уравнение* (= *тождество Гильберта*)

$$R(T,\ \lambda) - R(T,\ \mu) = (\mu - \lambda)R(T,\ \mu)R(T,\ \lambda).$$

$\lhd$ «Умножая тождество $\mu - \lambda = (\mu - T) - (\lambda - T)$ сначала на $R(T,\ \lambda)$ справа, а затем на $R(T,\ \mu)$ слева», последовательно приходим к требуемому. $\rhd$

5.6.20. *Если* $\lambda,\ \mu \in \operatorname{res}(T)$, *то* $R(T,\ \lambda)R(T,\ \mu) = R(T,\ \mu) \circ R(T,\ \lambda)$. $\lhd\rhd$

5.6.21. *Для* $\lambda \in \operatorname{res}(T)$ *выполнено*

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(T,\ \lambda) = (-1)^k k!\, R(T,\ \lambda)^{k+1}. \lhd\rhd$$

5.6.22. *Теорема о спектре произведения.* *Спектры* $\operatorname{Sp}(ST)$ *и* $\operatorname{Sp}(TS)$ *могут отличаться лишь нулем.*

$\lhd$ Достаточно установить, что $1 \notin \operatorname{Sp}(ST) \Rightarrow 1 \notin \operatorname{Sp}(TS)$. В самом деле, тогда при $\lambda \notin \operatorname{Sp}(ST)$ и $\lambda \neq 0$ будет

$$1 \notin \frac{1}{\lambda}\operatorname{Sp}(ST) \Rightarrow 1 \notin \operatorname{Sp}\left(\frac{1}{\lambda}ST\right) \Rightarrow 1 \notin \operatorname{Sp}\left(\frac{1}{\lambda}TS\right) \Rightarrow \lambda \notin \operatorname{Sp}(TS).$$

Итак, рассмотрим случай $1 \notin \operatorname{Sp}(ST)$. Формальные разложения типа ряда Неймана —

$$(1 - ST)^{-1} \sim 1 + ST + (ST)(ST) + (ST)(ST)(ST) + \dots,$$

$$T(1 - ST)^{-1}S \sim TS + TSTS + TSTSTS + \dots \sim (1 - TS)^{-1} - 1$$

— наводят на мысль, что справедливо представление

$$(1 - TS)^{-1} = 1 + T(1 - ST)^{-1}S$$

(которое обеспечит соотношение $1 \notin \mathrm{Sp}(TS)$). Следующие прямые выкладки:

$$\begin{gathered}(1+T(1-ST)^{-1}S)(1-TS) = \\ = 1+T(1-ST)^{-1}S - TS + T(1-ST)^{-1}(-ST)S = \\ = 1+T(1-ST)^{-1}S - TS + T(1-ST)^{-1}(1-ST-1)S = \\ = 1+T(1-ST)^{-1}S - TS + TS - T(1-ST)^{-1}S = 1;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(1-TS)(1+T(1-ST)^{-1}S) = \\ = 1-TS+T(1-ST)^{-1}S + T(-ST)(1-ST)^{-1}S = \\ = 1-TS+T(1-ST)^{-1}S + T(1-ST-1)(1-ST)^{-1}S = \\ = 1-TS+T(1-ST)^{-1}S + TS - T(1-ST)^{-1}S = 1\end{gathered}$$

доказывают искомое представление, а вместе с тем и теорему. ▷

Упражнения

5.1. Доказать, что нормированное пространство конечномерно в том и только в том случае, если любой линейный функционал на нем ограничен.

5.2. Проверить, что в каждом векторном пространстве можно определить норму.

5.3. Установить, что векторное пространство конечномерно в том и только в том случае, если все нормы в нем эквивалентны.

5.4. Доказать, что отделимые мультиметрики задают одну и ту же топологию конечномерного пространства.

5.5. Каждую ли норму в $\mathbb{R}^N$ можно использовать для нормировки произведения N нормированных пространств?

5.6. Выяснить условия непрерывности конечномерного оператора, действующего в мультинормированных пространствах.

5.7. Описать операторные нормы в пространстве квадратных матриц. Когда такие нормы сравнимы?

5.8. Найти расстояние между гиперплоскостями в нормированном пространстве.

5.9. Выяснить общий вид непрерывных линейных функционалов в классических пространствах.

5.10. Изучить вопрос о рефлексивности классических банаховых пространств.