Глава 6

Гильбертовы пространства

6.1. Эрмитовы формы и скалярные произведения

6.1.1. Определение. Пусть H — векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$. Отображение $f : H^2 \to \mathbb{F}$ называют *эрмитовой формой*, если

(1) отображение $f(\cdot\,,\ y) : x \mapsto f(x,\ y)$ лежит в $H^{\#}$ для всех $y \in Y$;

(2) $f(x,\ y) = f(y,\ x)^*$ при любых $x,\ y \in H$, где $\lambda \mapsto \lambda^*$ — естественная инволюция в $\mathbb{F}$, т. е. переход к комплексно сопряженному числу.

6.1.2. Замечание. Как видно, для эрмитовой формы f при каждом $x \in H$ отображение $f(x,\ \cdot\,) : y \mapsto (x,\ y)$ лежит в $H_*^{\#}$, где H_* — дуальное к H векторное пространство (см. 2.1.4 (2)).

Таким образом, при $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ эрмитова форма *билинейна*, т. е. линейна по каждому аргументу, а при $\mathbb{F} := \mathbb{C}$ — *полуторалинейна*, т. е. линейна по первому аргументу и $*$-линейна по второму.

6.1.3. *Для каждой эрмитовой формы f выполнено поляризационное тождество*:

$$f(x+y,\ x+y) - f(x-y,\ x-y) = 4\,\mathrm{Re}\, f(x,\ y) \quad (x,\ y \in H).$$

$$\triangleleft \quad -\frac{\begin{array}{l} f(x+y,\ x+y) = f(x,\ x) + f(x,\ y) + f(y,\ x) + f(y,\ y) \\ f(x-y,\ x-y) = f(x,\ x) - f(x,\ y) - f(y,\ x) + f(y,\ y)\end{array}}{2(f(x,\ y) + f(y,\ x))} \quad \triangleright$$

6.1.4. Определение. Эрмитову форму f называют *положительной*, или *скалярным произведением*, если $f(x,\ x) \geq 0$ для любого $x \in H$. При этом пишут: $(x,\ y) := \langle x \,|\, y \rangle := f(x,\ y)$ $(x,\ y \in H)$. Скалярное произведение называют *невырожденным*, если $(x,\ x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $(x \in H)$.

6.1.5. *Имеет место неравенство Коши — Буняковского*

$$|(x,\ y)|^2 \leq (x,\ x)(y,\ y) \quad (x,\ y \in H).$$

$\lhd$ Если $(x,\ x) = (y,\ y) = 0$, то $0 \leq (x + ty,\ x + ty) = t(x,\ y)^* + t^*(x,\ y)$. Выбирая $t := -(x,\ y)$, получаем $-2|(x,\ y)|^2 \geq 0$, т. е. в этом случае нужное установлено.

Если, к примеру, $(y,\ y) \neq 0$, то ввиду оценки

$$0 \leq (x + ty,\ x + ty) = (x,\ x) + 2t\,\mathrm{Re}(x,\ y) + t^2(y,\ y) \quad (t \in \mathbb{R})$$

заключаем: $\mathrm{Re}(x,\ y)^2 \leq (x,\ x)(y,\ y)$.

Если $(x,\ y) = 0$, то доказывать нечего. Если же $(x,\ y) \neq 0$, то положим $\theta := |(x,\ y)|\,(x,\ y)^{-1}$ и $\overline{x} := \theta x$. Тогда $|\theta| = 1$ и, кроме того,

$$(\overline{x},\ \overline{x}) = (\theta x,\ \theta x) = \theta\theta^*(x,\ x) = |\theta|^2(x,\ x) = (x,\ x);$$

$$|(x,\ y)| = \theta(x,\ y) = (\theta x,\ y) = (\overline{x},\ y) = \mathrm{Re}(\overline{x},\ y).$$

Таким образом, $|(x,\ y)|^2 = \mathrm{Re}(\overline{x},\ y)^2 \leq (x,\ x)(y,\ y)$. $\rhd$

6.1.6. *Если* $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *— скалярное произведение на* H, *то отображение* $\|\cdot\| : x \mapsto (x,\ x)^{1/2}$ *— полунорма на* H.

$\lhd$ Следует проверить только неравенство треугольника. Применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\|x + y\|^2 = (x,\ x) + (y,\ y) + 2\,\mathrm{Re}(x,\ y) \leq$$

$$\leq (x,\ x) + (y,\ y) + 2\|x\|\ \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \ \rhd$$

6.1.7. Определение. Пространство H со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)$ и соответствующей полунормой $\|\cdot\|$ называют *предгильбертовым*. Предгильбертово пространство H называют *гильбертовым*, если полунормированное пространство $(H,\ \|\cdot\|)$ банахово.

6.1.8. *В предгильбертовом пространстве H справедлив закон параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x,\ y \in H)$$

— сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

$$\lhd\ \|x+y\|^2 = (x+y,\ x+y) = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,\ y) + \|y\|^2;$$
$$\|x-y\|^2 = (x-y,\ x-y) = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x,\ y) + \|y\|^2 \ \rhd$$

6.1.9. ***Теорема фон Неймана — Йордана.*** *Если в полунормированном пространстве $(H,\ \|\cdot\|)$ справедлив закон параллелограмма, то H — предгильбертово пространство, т. е. найдется, и притом единственное, скалярное произведение $(\cdot\,,\,\cdot)$ в H такое, что $\|x\| = (x,\ x)^{1/2}$ для всех $x \in H$.*

$\lhd$ Рассмотрим вещественную основу $H_{\mathbb{R}}$ пространства H и для $x,\ y \in H_{\mathbb{R}}$ положим

$$(x,\ y)_{\mathbb{R}} := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Применяя закон параллелограмма, для отображения $(\cdot\,,\ y)_{\mathbb{R}}$ последовательно выводим

$$(x_1,\ y)_{\mathbb{R}} + (x_2,\ y)_{\mathbb{R}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2\right) - \left(\|x_1-y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2\right) - \left(\|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\|^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\|(x_1+y)+(x_2+y)\|^2 + \|x_1-x_2\|^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\|(x_1-y)+(x_2-y)\|^2 + \|x_1-x_2\|^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\|x_1+x_2+2y\|^2 - \frac{1}{2}\|x_1+x_2-2y\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|(x_1+x_2)/2+y\|^2 - \|(x_1-x_2)/2-y\|^2\right) =$$

$$= 2\left((x_1+x_2)/2,\ y\right)_{\mathbb{R}}.$$

В частности, при $x_2 := 0$ будет $(x_2,\ y)_{\mathbb{R}} = 0$, т. е. $1/2(x_1,\ y)_{\mathbb{R}} = (1/2\, x_1,\ y)_{\mathbb{R}}$. Соответственно при $x_1 := 2x_1$ и $x_2 := 2x_2$ имеем

$$(x_1+x_2,\ y)_{\mathbb{R}} = (x_1,\ y)_{\mathbb{R}} + (x_2,\ y)_{\mathbb{R}}.$$

В силу очевидной непрерывности отображения $(\cdot,\ y)_{\mathbb{R}}$ можно сделать вывод, что $(\cdot,\ y)_{\mathbb{R}} \in (H_{\mathbb{R}})^{\#}$. Положим

$$(x,\ y) := \mathbf{Re}^{-1}((\cdot,\ y)_{\mathbb{R}})(x),$$

где $\mathbf{Re}^{-1}$ — комплексификатор (см. 3.7.5).

В случае $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ ясно, что $(x,\ y) = (x,\ y)_{\mathbb{R}} = (y,\ x)$ и $(x,\ x) = \|x\|^2$, т. е. доказывать нечего. Если же $\mathbb{F} := \mathbb{C}$, то

$$(x,\ y) = (x,\ y)_{\mathbb{R}} - i(ix,\ y)_{\mathbb{R}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$(y,\ x) = (y,\ x)_{\mathbb{R}} - i(iy,\ x)_{\mathbb{R}} = (x,\ y)_{\mathbb{R}} - i(x,\ iy)_{\mathbb{R}} =$$

$$= (x,\ y)_{\mathbb{R}} + i(ix,\ y)_{\mathbb{R}} = (x,\ y)^*,$$

поскольку

$$(x,\ iy)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|i|\ \|y-ix\|^2 - |-i|\ \|ix+y\|^2\right) = -(ix,\ y)_{\mathbb{R}}.$$

Помимо этого,

$$(x,\ x) = (x,\ x)_{\mathbb{R}} - i(ix,\ x)_{\mathbb{R}} =$$

$$= \|x^2\| - \frac{i}{4}\left(\|ix+x\|^2 - \|ix-x\|^2\right) =$$

$$= \|x\|^2\left(1 - \frac{i}{4}\left(|1+i|^2 - |1-i|^2\right)\right) = \|x\|^2.$$

Утверждение об единственности следует из 6.1.3. $\triangleright$

6.1.10. Примеры.

(1) Примером гильбертова пространства служит пространство L_2 (относительно какой-нибудь системы с интегрированием). При этом скалярное произведение вводят так: $(f,\ g) := \int fg^*$ для $f,\ g \in L^2$. В частности, для $l_2(\mathscr{E})$ получаем $(x,\ y) := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e y_e^*$ при $x,\ y \in l_2(\mathscr{E})$.

(2) Пусть H — предгильбертово пространство и $(\cdot\,,\,\cdot) : H^2 \to \mathbb{F}$ — скалярное произведение в H. Ясно, что вещественная основа $H_{\mathbb{R}}$ со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)_{\mathbb{R}} : (x,\ y) \mapsto \operatorname{Re}(x,\ y)$ является предгильбертовым пространством, причем норма элемента в H не зависит от того, вычисляют ее в H или в $H_{\mathbb{R}}$. Предгильбертово пространство $(H_{\mathbb{R}},\ (\cdot\,,\,\cdot)_{\mathbb{R}})$ называют *овеществлением* пространства $(H,\ (\cdot\,,\,\cdot))$. В свою очередь, если вещественная основа некоторого полунормированного пространства является предгильбертовым пространством, то процесс комплексификации приводит к естественной предгильбертовой структуре в исходном пространстве.

(3) Пусть H — предгильбертово пространство и H_* — дуальное к H векторное пространство. Для $x,\ y \in H_*$ положим $(x,\ y)_* := (x,\ y)^*$. Ясно, что $(\cdot\,,\,\cdot)_*$ — скалярное произведение в H_*. Полученное предгильбертово пространство называют *дуальным* к H и сохраняют за ним обозначение H_*.

(4) Пусть H — предгильбертово пространство и $H_0 := \ker \|\cdot\|$ — ядро полунормы $\|\cdot\|$ в H. Привлекая неравенство Коши — Буняковского, теорему 2.3.8 и 6.1.10 (3), видим, что в фактор-пространстве H/H_0 естественным образом возникает скалярное произведение: если $\overline{x}_1 := \varphi(x_1)$ и $\overline{x}_2 := \varphi(x_2)$, где $x_1,\ x_2 \in H$ и $\varphi : H \to H/H_0$ — каноническое отображение, то $(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2) := (x_1,\ x_2)$. При этом предгильбертово пространство H/H_0 можно рассматривать как фактор-пространство полунормированного пространства $(H,\ \|\cdot\|)$ по ядру полунормы $\|\cdot\|$. Таким образом, H/H_0 — хаусдорфово пространство, которое называют хаусдорфовым предгильбертовым пространством, *ассоциированным с* H. Пополняя нормированное пространство H/H_0, получаем гильбертово пространство (например, в силу теоремы фон Неймана — Йордана). Построенное гильбертово пространство называют *ассоциированным* с исходным предгильбертовым пространством.

(5) Пусть $(H_e)_{e\in\mathscr{E}}$ — некоторое семейство гильбертовых пространств и H — сумма этого семейства по типу 2, т. е. $h \in H$ в том и только в том случае, если $h := (h_e)_{e\in\mathscr{E}}$, где $h_e \in H_e$ для $e \in \mathscr{E}$, и при этом

$$\|h\| := \left(\sum_{e\in\mathscr{E}} \|h_e\|^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

В силу 5.5.9 (6), H — банахово пространство. Для элементов $f,\ g \in H$, применяя последовательно закон параллелограмма, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\biggl(\sum_{e\in\mathscr{E}} \|f_e+g_e\|^2 + \sum_{e\in\mathscr{E}} \|f_e-g_e\|^2\biggr) =$$

$$= \sum_{e\in\mathscr{E}} \frac{1}{2}\left(\|f_e+g_e\|^2 + \|f_e-g_e\|^2\right) =$$

$$= \sum_{e\in\mathscr{E}} \left(\|f_e\|^2 + \|g_e\|^2\right) = \|f\|^2 + \|g\|^2,$$

так что, по теореме фон Неймана — Йордана, H — это гильбертово пространство. Пространство H называют *гильбертовой суммой* семейства гильбертовых пространств $(H_e)_{e\in\mathscr{E}}$ и обозначают $\oplus_{e\in\mathscr{E}} H_e$. При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ пишут также $H := H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$.

(6) *Пусть H — гильбертово пространство и S — некоторая система с интегрированием. Пространство $L_2(S,\ H)$, составленное из H-значных функций, суммируемых с квадратом, является гильбертовым.* ◁▷

6.2. Ортопроекторы

6.2.1. *Пусть U — выпуклое подмножество некоторого шарового слоя $(r+\varepsilon)B_H \setminus rB_H$, где $0 < \varepsilon \le r$, в гильбертовом пространстве H. Имеет место следующая оценка диаметра:* $\operatorname{diam} U \le \sqrt{12r\varepsilon}$.

◁ Для $x,\ y \in U$, учитывая, что $1/2(x+y) \in U$, и привлекая закон параллелограмма, выводим

$$\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - 4\,\|(x+y)/2\|^2 \le$$