том и только в том случае, если $h := (h_e)_{e\in\mathscr{E}}$, где $h_e \in H_e$ для $e \in \mathscr{E}$, и при этом

$$\|h\| := \left(\sum_{e\in\mathscr{E}} \|h_e\|^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

В силу 5.5.9 (6), H — банахово пространство. Для элементов $f,\ g \in H$, применяя последовательно закон параллелограмма, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{e\in\mathscr{E}} \|f_e + g_e\|^2 + \sum_{e\in\mathscr{E}} \|f_e - g_e\|^2\Bigg) =$$

$$= \sum_{e\in\mathscr{E}} \frac{1}{2}\left(\|f_e+g_e\|^2 + \|f_e-g_e\|^2\right) =$$

$$= \sum_{e\in\mathscr{E}} \left(\|f_e\|^2 + \|g_e\|^2\right) = \|f\|^2 + \|g\|^2,$$

так что, по теореме фон Неймана — Йордана, H — это гильбертово пространство. Пространство H называют *гильбертовой суммой* семейства гильбертовых пространств $(H_e)_{e\in\mathscr{E}}$ и обозначают $\oplus_{e\in\mathscr{E}} H_e$. При $\mathscr{E} := \mathbb{N}$ пишут также $H := H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots$.

(6) *Пусть H — гильбертово пространство и S — некоторая система с интегрированием. Пространство $L_2(S,\ H)$, составленное из H-значных функций, суммируемых с квадратом, является гильбертовым.* $\triangleleft\triangleright$

6.2. Ортопроекторы

6.2.1. *Пусть U — выпуклое подмножество некоторого шарового слоя $(r+\varepsilon)B_H \setminus rB_H$, где $0 < \varepsilon \le r$, в гильбертовом пространстве H. Имеет место следующая оценка диаметра:* $\operatorname{diam} U \le \sqrt{12r\varepsilon}$.

$\triangleleft$ Для $x,\ y \in U$, учитывая, что $1/2(x+y) \in U$, и привлекая закон параллелограмма, выводим

$$\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - 4\,\|(x+y)/2\|^2 \le$$

$$\leq 4(r+\varepsilon)^2 - 4r^2 = 8r\varepsilon + 4\varepsilon^2 \leq 12r\varepsilon. \ \triangleright$$

6.2.2. Теорема Леви о проекции. *Пусть U — непустое выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве H и $x \in H \setminus U$. Тогда существует, и притом единственный, элемент $u_0 \in U$ такой, что*

$$\|x - u_0\| = \inf\{\|x-u\| : \ u \in U\}.$$

$\triangleleft$ Положим $U_\varepsilon := \{u \in U : \ \|x-u\| \leq \inf\|U - x\| + \varepsilon\}$. В силу 6.2.1 семейство $(U_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ образует базис фильтра Коши в U. $\triangleright$

6.2.3. Определение. Элемент u_0, фигурирующий в 6.2.2, называют ***наилучшим приближением*** x в множестве U или ***проекцией*** x на множество U.

6.2.4. *Пусть H_0 — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H и $x \in H \setminus H_0$. Элемент $x_0 \in H_0$ является проекцией x на H_0 в том и только в том случае, если $(x - x_0, \ h_0) = 0$ для каждого $h_0 \in H_0$.*

$\triangleleft$ Достаточно рассмотреть овеществление $(H_0)_\mathbb{R}$ пространства H_0. На $(H_0)_\mathbb{R}$ определена выпуклая функция $f(h_0) := (h_0 - x, \ h_0 - x)$. При этом $x_0 \in H_0$ служит проекцией x на H_0 тогда и только тогда, когда $0 \in \partial_{x_0}(f)$. В связи с 3.5.2 (4) последнее вхождение означает, что $(x - x_0, \ h_0) = 0$ при любом $h_0 \in H_0$, ибо $f'(x_0) = 2(x_0 - x, \cdot)$. $\triangleright$

6.2.5. Определение. Элементы $x, \ y \in H$ называют ***ортогональными*** и пишут $x \perp y$, если $(x, \ y) = 0$. Символом $U^\perp$ обозначают совокупность элементов, ортогональных ко всем точкам данного множества U, т. е. $U^\perp := \{y \in H : \ x \in U \Rightarrow x \perp y\}$. Множество $U^\perp$ называют ***ортогональным дополнением*** множества U.

6.2.6. *Пусть H_0 — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H. Тогда его ортогональное дополнение $H_0^\perp$ — замкнутое подпространство, причем $H = H_0 \oplus H_0^\perp$.*

$\triangleleft$ Замкнутость $H_0^\perp$ в H очевидна. Ясно также, что $H_0 \wedge H_0^\perp = H_0 \cap H_0^\perp = 0$. Осталось проверить, что $H_0 \vee H_0^\perp = H_0 + H_0^\perp = H$. Возьмем элемент $h \in H \setminus H_0$. На основании 6.2.2 существует проекция $h_0 \in H_0$, а, в силу 6.2.4, $h - h_0 \in H_0^\perp$. Итак, $h = h_0 + (h - h_0) \in H_0 + H_0^\perp$. $\triangleright$

6.2.7. Определение. Проектор на замкнутое подпространство H_0 параллельно $H_0^\perp$ называют *ортопроектором* на H_0 и обозначают P_{H_0}.

6.2.8. *Лемма Пифагора.* $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. $\triangleleft\triangleright$

6.2.9. *Следствие.* *Норма ортопроектора не превосходит единицы:* $H \neq 0,\ H_0 \neq 0 \Rightarrow \|P_{H_0}\| = 1$. $\triangleleft\triangleright$

6.2.10. *Теорема об ортопроекторе.* *Для каждого оператора* $P \in \mathscr{L}(H)$ *такого, что* $P^2 = P$, *эквивалентны утверждения:*

(1) P — *ортопроектор на* $H_0 := \operatorname{im} P$;

(2) $\|h\| \leq 1 \Rightarrow \|Ph\| \leq 1$;

(3) $(Px,\ P^d y) = 0$, *где* $P^d := I_H - P$ *и* $x,\ y \in H$;

(4) $(Px,\ y) = (x,\ Py)$ *при* $x,\ y \in H$.

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Отмечено в 6.2.9.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $H_1 := \ker P = \operatorname{im} P^d$. Возьмем $x \in H_1^\perp$. Поскольку $x = Px + P^d x$ и $x \perp P^d x$, то $\|x\|^2 \geq \|Px\|^2 = (x - P^d x,\ x - P^d x) = (x,\ x) - 2\operatorname{Re}(x,\ P^d x) + (P^d x,\ P^d x) = \|x\|^2 + \|P^d x\|^2$. Отсюда $P^d x = 0$, т. е. $x \in \operatorname{im} P$. Из соотношений $H_1 = \ker P$ и $H_1^\perp \subset \operatorname{im} P$ с учетом 6.2.6 выводим: $H_1^\perp = \operatorname{im} P = H_0$. Итак, $(Px, P^d y) = 0$ для любых $x, y \in H$, ибо $Px \in H_0$, а $P^d y \in H_1$.

(3) $\Rightarrow$ (4): $(Px,\ y) = (Px,\ Py + P^d y) = (Px,\ Py) = (Px,\ Py) + (P^d x,\ Py) = (x,\ Py)$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Проверим сначала, что H_0 — замкнутое подпространство. Пусть $h_0 := \lim h_n$ и $h_n \in H_0$, т. е. $Ph_n = h_n$. При любом $x \in H$ из непрерывности функционалов $(\cdot,\ x)$ и $(\cdot,\ Px)$ последовательно вытекает

$$(h_0,\ x) = \lim\,(h_n,\ x) = \lim\,(Ph_n,\ x) = \lim\,(h_n,\ Px) = (Ph_0,\ x).$$

Отсюда $(h_0 - Ph_0,\ h_0 - Ph_0) = 0$, т. е. $h_0 \in \operatorname{im} P$.

Теперь для произвольных $x \in H$ и $h_0 \in H_0$ выводим $(x - Px,\ h_0) = (x - Px,\ Ph_0) = (P(x - Px),\ h_0) = (Px - P^2 x,\ h_0) = (Px - Px,\ h_0) = 0$. Таким образом, привлекая 6.2.4, получаем $Px = P_{H_0} x$. $\triangleright$

6.2.11. *Пусть* $P_1,\ P_2$ — *ортопроекторы, причем* $P_1 P_2 = 0$. *Тогда* $P_2 P_1 = 0$.

$\triangleleft$ $P_1 P_2 = 0 \Rightarrow \operatorname{im} P_2 \subset \ker P_1 \Rightarrow \operatorname{im} P_1 = (\ker P_1)^\perp \subset (\operatorname{im} P_2)^\perp = \ker P_2 \Rightarrow P_2 P_1 = 0$ $\triangleright$

6.2.12. Определение. Ортопроекторы P_1 и P_2 называют *ортогональными* (и пишут $P_1 \perp P_2$ или $P_2 \perp P_1$), если $P_1 P_2 = 0$.

6.2.13. Теорема. *Пусть $P_1, \dots, P_n$ — ортопроекторы. Оператор $P := P_1 + \dots + P_n$ является ортопроектором в том и только в том случае, если $P_l \perp P_m$ при $l \neq m$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Заметим прежде всего, что для каждого ортопроектора P_0 по теореме 6.2.10 выполнено $\|P_0 x\|^2 = (P_0 x,\ P_0 x) = (P_0^2 x,\ x) = (P_0 x,\ x)$. Следовательно, при $x \in H$ и $l \neq m$ справедливо

$$\|P_l x\|^2 + \|P_m x\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_k x,\ x) = (Px,\ x) = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2.$$

В частности, полагая $x := P_l x$, получаем

$$\|P_l x\|^2 + \|P_m P_l x\|^2 \leq \|P_l x\|^2 \Rightarrow \|P_m P_l\| = 0.$$

$\Leftarrow$: Прямой подсчет показывает, что P — идемпотентный оператор. В самом деле,

$$P^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)^2 = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} P_l P_m = \sum_{k=1}^{n} P_k^2 = P.$$

Помимо этого, в силу 6.2.10 (4), $(P_k x,\ y) = (x,\ P_k y)$ и, стало быть, $(Px,\ y) = (x,\ Py)$. Осталось вновь сослаться на 6.2.10 (4). $\rhd$

6.2.14. Замечание. Теорему 6.2.13 называют *критерием ортогональности конечного множества ортопроекторов.*

6.3. Гильбертов базис

6.3.1. Определение. Семейство $(x_e)_{e \in \mathscr{E}}$ элементов некоторого гильбертова пространства H называют *ортогональным*, если $e_1 \neq e_2 \Rightarrow x_{e_1} \perp x_{e_2}$. Соответственно множество $\mathscr{E}$ в гильбертовом пространстве H называют ортогональным, если ортогонально семейство $(e)_{e \in \mathscr{E}}$.