6.2.12. Определение. Ортопроекторы P_1 и P_2 называют *ортогональными* (и пишут $P_1 \perp P_2$ или $P_2 \perp P_1$), если $P_1 P_2 = 0$.

6.2.13. Теорема. *Пусть $P_1, \dots, P_n$ — ортопроекторы. Оператор $P := P_1 + \dots + P_n$ является ортопроектором в том и только в том случае, если $P_l \perp P_m$ при $l \neq m$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Заметим прежде всего, что для каждого ортопроектора P_0 по теореме 6.2.10 выполнено $\|P_0 x\|^2 = (P_0 x,\ P_0 x) = (P_0^2 x,\ x) = (P_0 x,\ x)$. Следовательно, при $x \in H$ и $l \neq m$ справедливо

$$\|P_l x\|^2 + \|P_m x\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_k x,\ x) = (Px,\ x) = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2.$$

В частности, полагая $x := P_l x$, получаем

$$\|P_l x\|^2 + \|P_m P_l x\|^2 \leq \|P_l x\|^2 \Rightarrow \|P_m P_l\| = 0.$$

$\Leftarrow$: Прямой подсчет показывает, что P — идемпотентный оператор. В самом деле,

$$P^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} P_k \right)^2 = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} P_l P_m = \sum_{k=1}^{n} P_k^2 = P.$$

Помимо этого, в силу 6.2.10 (4), $(P_k x,\ y) = (x,\ P_k y)$ и, стало быть, $(Px,\ y) = (x,\ Py)$. Осталось вновь сослаться на 6.2.10 (4). $\rhd$

6.2.14. Замечание. Теорему 6.2.13 называют *критерием ортогональности конечного множества ортопроекторов.*

6.3. Гильбертов базис

6.3.1. Определение. Семейство $(x_e)_{e \in \mathscr{E}}$ элементов некоторого гильбертова пространства H называют *ортогональным*, если $e_1 \neq e_2 \Rightarrow x_{e_1} \perp x_{e_2}$. Соответственно множество $\mathscr{E}$ в гильбертовом пространстве H называют ортогональным, если ортогонально семейство $(e)_{e \in \mathscr{E}}$.

6.3.2. Теорема Пифагора. *Ортогональное семейство $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ элементов гильбертова пространства (безусловно) суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемо числовое семейство $(\|x_e\|^2)_{e\in\mathscr{E}}$. При этом*

$$\left\|\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e\right\|^2 = \sum_{e\in\mathscr{E}} \|x_e\|^2.$$

$\lhd$ Пусть $s_\theta := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e$, где θ — конечное подмножество $\mathscr{E}$. На основании 6.2.8, $\|s_\theta\|^2 = \sum_{e\in\theta} \|x_e\|^2$. Значит, для конечного множества θ', содержащего θ, выполнено

$$\|s_{\theta'} - s_\theta\|^2 = \|s_{\theta'\setminus\theta}\|^2 = \sum_{e\in\theta'\setminus\theta} \|x_e\|^2.$$

Иными словами, фундаментальность сети (s_θ) равносильна фундаментальности сети частичных сумм семейства $(\|x_e\|^2)_{e\in\mathscr{E}}$. Привлекая 5.5.3, получаем требуемое. $\rhd$

6.3.3. Теорема о суммировании ортопроекторов. *Пусть $(P_e)_{e\in\mathscr{E}}$ — семейство попарно ортогональных ортопроекторов в гильбертовом пространстве H. Тогда для каждого $x \in H$ (безусловно) суммируемо семейство $(P_e x)_{e\in\mathscr{E}}$. При этом оператор $Px := \sum_{e\in\mathscr{E}} P_e x$ является ортопроектором на подпространство*

$$\mathscr{H} := \left\{\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e :\ x_e \in H_e := \operatorname{im} P_e,\ \sum_{e\in\mathscr{E}} \|x_e\|^2 < +\infty\right\}.$$

$\lhd$ Для конечного подмножества θ в $\mathscr{E}$ положим $s_\theta := \sum_{e\in\theta} P_e$. По теореме 6.2.13, s_θ — это ортопроектор. Поэтому, с учетом 6.2.8, $\|s_\theta x\|^2 = \sum_{e\in\theta} \|P_e x\|^2 \le \|x\|^2$ при каждом $x \in H$. Следовательно, семейство $(\|P_e x\|^2)_{e\in\mathscr{E}}$ суммируемо (сеть частичных сумм возрастает и ограничена). По теореме Пифагора имеется сумма $Px := \sum_{e\in\mathscr{E}} P_e x$, т. е. $Px = \lim_\theta s_\theta x$.

Отсюда $P^2 x = \lim_\theta s_\theta P x = \lim_\theta s_\theta \lim_{\theta'} s_{\theta'} x = \lim_\theta \lim_{\theta'} s_\theta s_{\theta'} x = \lim_\theta \lim_{\theta'} s_{\theta\cap\theta'} x = \lim_\theta s_\theta x = Px$. Окончательно $\|Px\| = \|\lim_\theta s_\theta x\| = \lim_\theta \|s_\theta x\| \le \|x\|$ и, кроме того, $P^2 = P$. Апеллируя к 6.2.10, заключаем, что P — ортопроектор на $\operatorname{im} P$.

Если $x \in \operatorname{im} P$, т. е. $Px = x$, то $x = \sum_{e\in\mathscr{E}} P_e x$ и по теореме Пифагора $\sum_{e\in\mathscr{E}} \|P_e x\|^2 = \|x\|^2 = \|Px\|^2 < +\infty$. Поскольку $P_e x \in$

H_e $(e \in \mathscr{E})$, то $x \in \mathscr{H}$. Если же $x_e \in H_e$ и $\sum_{e \in \mathscr{E}} \|x_e\|^2 < +\infty$, то для $x := \sum_{e \in \mathscr{E}} x_e$ (существование следует из все той же теоремы Пифагора) будет $x = \sum_{e \in \mathscr{E}} x_e = \sum_{e \in \mathscr{E}} P_e x_e = Px$, т. е. $x \in \operatorname{im} P$. Итак, $\operatorname{im} P = \mathscr{H}$. $\triangleright$

6.3.4. Замечание. Приведенную теорему можно трактовать как утверждение об изоморфизме $\mathscr{H}$ с гильбертовой суммой семейства $(H_e)_{e \in \mathscr{E}}$. Нужное отождествление при этом осуществляет, как видно, интеграл Бохнера, представляющий в данном случае процесс суммирования.

6.3.5. Замечание. Пусть $h \in H$ — нормированный элемент: $\|h\| = 1$. Пусть, далее, $H_0 := \mathbb{F}h$ — одномерное подпространство в H, натянутое на h_0. Для каждого элемента $x \in H$ и произвольного скаляра $\lambda \in \mathbb{F}$ справедливо

$$(x - (x,\ h)h,\ \lambda h) = \lambda^*((x,\ h) - (x,\ h))(h,\ h) = 0.$$

Значит, по предложению 6.2.4, $P_{H_0} = (\cdot\,,\ h) \otimes h$. Для обозначения этого ортопроектора удобно использовать символ $\langle h \rangle$. Итак, $\langle h \rangle$: $x \mapsto (x,\ h)h$ $(x \in H)$.

6.3.6. Определение. Семейство элементов гильбертова пространства называют *ортонормальным* (или *ортонормированным*), если, во-первых, это семейство ортогонально, а во-вторых, если нормы входящих в него векторов равны единице. Аналогично определяют ортонормальные множества.

6.3.7. *Для любого ортонормального множества $\mathscr{E}$ в H и произвольного элемента $x \in H$ семейство $(\langle e \rangle x)_{e \in \mathscr{E}}$ (безусловно) суммируемо. При этом имеет место неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{e \in \mathscr{E}} |(x,\ e)|^2.$$

$\triangleleft$ Достаточно сослаться на теорему о суммировании ортопроекторов, ибо

$$\|x\|^2 \geq \left\| \sum_{e \in \mathscr{E}} \langle e \rangle x \right\|^2 = \left\| \sum_{e \in \mathscr{E}} (x,\ e)e \right\|^2 = \sum_{e \in \mathscr{E}} \|(x,\ e)e\|^2 . \ \triangleright$$

6.3.8. Определение. Ортонормальное множество $\mathscr{E}$ в гильбертовом пространстве H называют *гильбертовым базисом* (в H), если для всякого $x \in H$ выполнено $x = \sum_{e \in \mathscr{E}} \langle e \rangle x$. Ортонормальное семейство элементов гильбертова пространства называют гильбертовым базисом, если область значений этого семейства является гильбертовым базисом.

6.3.9. *Ортонормальное множество $\mathscr{E}$ является гильбертовым базисом в H в том и только в том случае, если линейная оболочка $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ плотна в H.* $\triangleleft\triangleright$

6.3.10. Определение. Говорят, что множество $\mathscr{E}$ удовлетворяет *условию Стеклова*, если $\mathscr{E}^{\perp} = 0$.

6.3.11. *Теорема Стеклова.* *Ортонормальное множество является гильбертовым базисом в том и только в том случае, если оно удовлетворяет условию Стеклова.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Пусть $h \in \mathscr{E}^{\perp}$. Тогда $h = \sum_{e \in \mathscr{E}} \langle e \rangle h = \sum_{e \in \mathscr{E}} (h,\ e) e = \sum_{e \in \mathscr{E}} 0 = 0$.

$\Leftarrow$: Для $x \in H$, в силу 6.3.3 и 6.2.4, $x - \sum_{e \in \mathscr{E}} \langle e \rangle x \in \mathscr{E}^{\perp}$. $\triangleright$

6.3.12. *Теорема.* *В каждом гильбертовом пространстве есть гильбертов базис.*

$\triangleleft$ По лемме Куратовского — Цорна в гильбертовом пространстве H имеется максимальное по включению ортонормальное множество $\mathscr{E}$. Если есть $h \in H \setminus H_0$, где $H_0 := \operatorname{cl} \mathscr{L}(\mathscr{E})$, то элемент $h_1 := h - P_{H_0} h$ ортогонален любому элементу из $\mathscr{E}$ и, значит, при $H \neq 0$ будет $\mathscr{E} \cup \{\|h_1\|^{-1} h_1\} = \mathscr{E}$. Получили противоречие. В случае $H = 0$ доказывать нечего. $\triangleright$

6.3.13. Замечание. Можно показать, что у двух гильбертовых базисов одного и того же гильбертова пространства H одна и та же мощность. Эту мощность называют *гильбертовой размерностью* H.

6.3.14. Замечание. Пусть $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — счетная последовательность линейно независимых элементов гильбертова пространства H. Положим еще $x_0 := 0$, $e_0 := 0$, и пусть

$$y_n := x_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_k \rangle x_n, \quad e_n := \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Видно, что $(y_n,\ e_k) = 0$ для $0 \le k \le n-1$ (например, из 6.2.13). Столь же несомненно, что $y_n \neq 0$, ввиду бесконечномерности H. Про ортонормальную последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ говорят, что она получена *процессом ортогонализации*, или *процессом Грама — Шмидта*, из последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Привлекая процесс ортогонализации, нетрудно показать, что в гильбертовом пространстве есть счетный гильбертов базис в том и только в том случае, если в нем имеется счетное всюду плотное множество, т. е. если это пространство *сепарабельно*. $\triangleleft\triangleright$

6.3.15. Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — гильбертов базис в пространстве H и $x \in H$. Числовое семейство $\widehat{x} := (\widehat{x}_e)_{e\in\mathscr{E}}$ в $\mathbb{F}^{\mathscr{E}}$, заданное соотношением $\widehat{x}_e := (x,\ e)$, называют *преобразованием Фурье* элемента x (относительно гильбертова базиса $\mathscr{E}$).

6.3.16. *Теорема Рисса — Фишера об изоморфизме.* *Пусть $\mathscr{E}$ — гильбертов базис в H. Преобразование Фурье $\mathscr{F} : x \mapsto \widehat{x}$ (относительно базиса $\mathscr{E}$) есть изометрический изоморфизм H на $l_2(\mathscr{E})$. Обратное преобразование — суммирование Фурье $\mathscr{F}^{-1} : l_2(\mathscr{E}) \to H$ — действует по правилу $\mathscr{F}^{-1}(x) := \sum_{e\in\mathscr{E}} x_e e$ для $x := (x_e)_{e\in\mathscr{E}} \in l_2(\mathscr{E})$. При этом для любых $x,\ y \in H$ имеет место равенство Парсеваля*

$$(x,\ y) = \sum_{e\in\mathscr{E}} \widehat{x}_e \widehat{y}_e^{\,*}.$$

$\triangleleft$ По теореме Пифагора преобразование Фурье действует в $l_2(\mathscr{E})$. По теореме 6.3.3, $\widehat{\ }$ — это эпиморфизм. По теореме Стеклова, $\widehat{\ }$ — мономорфизм. То, что $\mathscr{F}^{-1}\widehat{x} = x$ для $x \in H$ и $\widehat{\mathscr{F}^{-1}(x)} = x$ для $x \in l_2(\mathscr{E})$, несомненно. Равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{e\in\mathscr{E}} \|\widehat{x}\|^2 = \|\widehat{x}_e\|_2^2 \quad (x \in H)$$

следует из теоремы Пифагора. При этом

$$(x,\ y) = \left(\sum_{e\in\mathscr{E}} \widehat{x}_e e,\ \sum_{e\in\mathscr{E}} \widehat{y}_e e\right) = \sum_{e,e'\in\mathscr{E}} \widehat{x}_e \widehat{y}_{e'}^{\,*}(e,\ e') = \sum_{e\in\mathscr{E}} \widehat{x}_e \widehat{y}_e^{\,*}. \ \triangleright$$

6.3.17. Замечание. Равенства Парсеваля показывают, что преобразование Фурье сохраняет скалярные произведения. Таким образом, это преобразование — *унитарный оператор* или *гильбертов* *изоморфизм*, т. е. изоморфизм, сохраняющий скалярные произведения. В этой связи теорему Рисса — Фишера иногда называют теоремой о «гильбертовом изоморфизме гильбертовых пространств (одной гильбертовой размерности)».

6.4. Эрмитово сопряженный оператор

6.4.1. *Теорема Рисса о штриховании.* *Пусть H — гильбертово пространство. Для $x \in H$ положим $x' := (\cdot\,,\ x)$. Тогда отображение штрихования $x \mapsto x'$ осуществляет изометрический изоморфизм H_* на H'.*

$\lhd$ Ясно, что $x = 0 \Rightarrow x' = 0$. Если же $x \neq 0$, то

$$\|y'\|_{H'} = \sup_{\|y\| \le 1} |(y,\ x)| \le \sup_{\|y\| \le 1} \|y\|\ \|x\| \le \|x\|;$$

$$\|x'\|_{H'} = \sup_{\|y\| \le 1} |(y,\ x)| \ge |(x/\|x\|,\ x)| = \|x\|.$$

Таким образом, $x \mapsto x'$ — изометрия H_* в H'. Проверим, что это отображение является эпиморфизмом.

Пусть $l \in H'$ и $H_0 := \ker l \neq H$ (если таких l нет, то доказывать нечего). Выберем элемент $\|e\| = 1$ такой, что $e \in H_0^{\perp}$, и положим $\operatorname{grad} l := l(e)^* e$. Если $x \in H_0$, то

$$(\operatorname{grad} l)'(x) = (x,\ \operatorname{grad} l) = (x,\ l(e)^* e) = l(e)^{**}(x,\ e) = 0.$$

Следовательно, для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$ и всех $x \in H$ в силу 2.3.12 выполнено $(\operatorname{grad} l)'(x) = \alpha l(x)$. В частности, при $x := e$ получаем

$$(\operatorname{grad} l)'(e) = (e,\ \operatorname{grad} l) = l(e)(e,\ e) = \alpha l(e),$$

т. е. $\alpha = 1$. $\rhd$

6.4.2. Замечание. Из теоремы Рисса следует, что сопряженное пространство H' обладает естественной структурой гильбертова пространства и отображение штрихования $x \mapsto x'$ осуществляет гильбертов изоморфизм H_* на H'. Обратным отображением при этом служит построенное в доказательстве *градиентное отображение* $l \mapsto \operatorname{grad} l$. В этой связи 6.4.1 называют теоремой «об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве».