изоморфизм, т. е. изоморфизм, сохраняющий скалярные произведения. В этой связи теорему Рисса — Фишера иногда называют теоремой о «гильбертовом изоморфизме гильбертовых пространств (одной гильбертовой размерности)».

6.4. Эрмитово сопряженный оператор

6.4.1. *Теорема Рисса о штриховании.* *Пусть H — гильбертово пространство. Для $x \in H$ положим $x' := (\cdot\,,\ x)$. Тогда отображение штрихования $x \mapsto x'$ осуществляет изометрический изоморфизм H_* на H'.*

◁ Ясно, что $x = 0 \Rightarrow x' = 0$. Если же $x \neq 0$, то

$$\|y'\|_{H'} = \sup_{\|y\|\le 1} |(y,\ x)| \le \sup_{\|y\|\le 1} \|y\|\ \|x\| \le \|x\|;$$

$$\|x'\|_{H'} = \sup_{\|y\|\le 1} |(y,\ x)| \ge |(x/\|x\|,\ x)| = \|x\|.$$

Таким образом, $x \mapsto x'$ — изометрия H_* в H'. Проверим, что это отображение является эпиморфизмом.

Пусть $l \in H'$ и $H_0 := \ker l \neq H$ (если таких l нет, то доказывать нечего). Выберем элемент $\|e\| = 1$ такой, что $e \in H_0^{\perp}$, и положим $\operatorname{grad} l := l(e)^* e$. Если $x \in H_0$, то

$$(\operatorname{grad} l)'(x) = (x,\ \operatorname{grad} l) = (x,\ l(e)^* e) = l(e)^{**}(x,\ e) = 0.$$

Следовательно, для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$ и всех $x \in H$ в силу 2.3.12 выполнено $(\operatorname{grad} l)'(x) = \alpha l(x)$. В частности, при $x := e$ получаем

$$(\operatorname{grad} l)'(e) = (e,\ \operatorname{grad} l) = l(e)(e,\ e) = \alpha l(e),$$

т. е. $\alpha = 1$. ▷

6.4.2. Замечание. Из теоремы Рисса следует, что сопряженное пространство H' обладает естественной структурой гильбертова пространства и отображение штрихования $x \mapsto x'$ осуществляет гильбертов изоморфизм H_* на H'. Обратным отображением при этом служит построенное в доказательстве *градиентное отображение* $l \mapsto \operatorname{grad} l$. В этой связи 6.4.1 называют теоремой «об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве».

6.4.3. *Гильбертово пространство рефлексивно.*

$\lhd$ Пусть $\iota : H \to H''$ — двойное штрихование, т. е. каноническое вложение H во второе сопряженное пространство H'', определенное соотношением $x''(l) = \iota(x)(l) = l(x)$, где $x \in H$ и $l \in H'$ (см. 5.1.10 (8)). Проверим, что ι — эпиморфизм. Пусть $f \in H''$. Рассмотрим отображение $y \mapsto f(y')$ для $y \in H$. Ясно, что это отображение — линейный функционал над H_* и, стало быть, по теореме Рисса найдется элемент $x \in H = H_{**}$ такой, что $(y,\ x)_* = (x,\ y) = f(y')$ для каждого $y \in H$. Имеем $\iota(x)(y') = y'(x) = (x,\ y) = f(y')$ при всех $y \in H$. Так как по теореме Рисса $y \mapsto y'$ — отображение на H', получаем $\iota(x) = f$. $\rhd$

6.4.4. *Пусть H_1, H_2 — произвольные гильбертовы пространства и $T \in B(H_1,\ H_2)$. Тогда существует, и притом единственное, отображение $T^* : H_2 \to H_1$ такое, что для любых $x \in H_1$, $y \in H_2$ выполнено*

$$(Tx,\ y) = (x,\ T^*y).$$

При этом $T^* \in B(H_2,\ H_1)$ и $\|T^*\| = \|T\|$.

$\lhd$ Пусть $y \in H_2$. Отображение $x \mapsto (Tx,\ y)$ есть композиция $y' \circ T$, т. е. представляет собой непрерывный линейный функционал на H_1. По теореме Рисса имеется в точности один элемент $x \in H_1$, для которого $x' = y' \circ T$. Полагаем $T^*y := x$. Ясно, что $T^* \in \mathscr{L}(H_2,\ H_1)$. Помимо этого, привлекая неравенство Коши — Буняковского и нормативное неравенство, выводим

$$|(T^*y,\ T^*y)| = |(TT^*y,\ y)| \le \|TT^*y\|\ \|y\| \le \|T\|\ \|T^*y\|\ \|y\|.$$

Значит, $\|T^*y\| \le \|T\|\ \|y\|$ для всех $y \in H_2$, т. е. $\|T^*\| \le \|T\|$. В то же время $T = T^{**} := (T^*)^*$, т. е. $\|T\| = \|T^{**}\| \le \|T^*\|$. $\rhd$

6.4.5. Определение. Оператор $T^* \in B(H_2,\ H_1)$, построенный в 6.4.4, называют *эрмитово сопряженным* к $T \in B(H_1,\ H_2)$.

6.4.6. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и, кроме того, S, $T \in B(H_1,\ H_2)$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда*

(1) $T^{**} = T$;

(2) $(S+T)^* = S^* + T^*$;

(3) $(\lambda T)^* = \lambda^* T^*$;

(4) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

$\lhd$ (1)–(3) — очевидные свойства. Если же $\|x\| \leq 1$, то

$$\|Tx\|^2 = (Tx,\ Tx) = |(Tx,\ Tx)| = |(T^*Tx,\ x)| \leq$$

$$\leq \|T^*Tx\|\ \|x\| \leq \|T^*T\|.$$

Кроме того, в силу субмультипликативности операторной нормы и предложения 6.4.4, $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\ \|T\| = \|T\|^2$, что доказывает (4). $\rhd$

6.4.7. *Пусть $H_1,\ H_2,\ H_3$ — три гильбертовых пространства, и заданы $T \in B(H_1,\ H_2)$ и $S \in B(H_2,\ H_3)$. Тогда $(ST)^* = T^*S^*$.*

$\lhd$ $(STx,\ z) = (Tx,\ S^*z) = (x,\ T^*S^*z) \quad (x \in H_1,\ z \in H_3)$ $\rhd$

6.4.8. Определение. Рассмотрим простейшую — элементарную — диаграмму $H_1 \xrightarrow{T} H_2$. Диаграмму $H_1 \xleftarrow{T^*} H_2$ называют *эрмитово сопряженной* к исходной. Если в произвольной диаграмме, составленной из ограниченных линейных отображений гильбертовых пространств, каждая элементарная поддиаграмма заменена на эрмитово сопряженную, то возникшую диаграмму называют *эрмитово сопряженной* к исходной.

6.4.9. *Принцип эрмитова сопряжения диаграмм.* *Диаграмма коммутативна в том и только в том случае, если коммутативна эрмитово сопряженная к ней диаграмма.*

$\lhd$ Следует из 6.4.7 и 6.4.6 (1). $\rhd$

6.4.10. *Следствие.* *Пусть $T \in B(H_1,\ H_2)$ и $T^* \in B(H_2,\ H_1)$. Оператор T обратим в том и только в том случае, если обратим T^*. При этом $T^{*-1} = T^{-1*}$.* $\lhd\rhd$

6.4.11. *Следствие.* *Для $T \in B(H)$ верно $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \Leftrightarrow \lambda^* \in \mathrm{Sp}(T^*)$.* $\lhd\rhd$

6.4.12. *Принцип эрмитова сопряжения последовательностей* (ср. 7.6.13). *Последовательность*

$$\ldots \longrightarrow H_{k-1} \xrightarrow{T_k} H_k \xrightarrow{T_{k+1}} H_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

точна в том и только в том случае, если точна эрмитово сопряженная последовательность

$$\ldots \longleftarrow H_{k-1} \xleftarrow{T_k^*} H_k \xleftarrow{T_{k+1}^*} H_{k+1} \longleftarrow \ldots. \quad \lhd\rhd$$

6.4.13. Определение. *Инволютивной алгеброй* или $*$-*алгеброй* (над основным полем $\mathbb{F}$) называют алгебру A *с инволюцией* $*$, т. е. с отображением $a \mapsto a^*$ в A таким, что

(1) $a^{**} = a \ (a \in A)$;

(2) $(a + b)^* = a^* + b^* \ (a,\ b \in A)$;

(3) $(\lambda a)^* = \lambda^* a^* \ (\lambda \in \mathbb{F},\ a \in A)$;

(4) $(ab)^* = b^* a^* \ (a,\ b \in A)$.

Банахову алгебру A с инволюцией $*$, для которой $\|a^*a\| = \|a\|^2$ при всех $a \in A$, называют C^*-*алгеброй.*

6.4.14. *Пространство $B(H)$ эндоморфизмов гильбертова пространства H представляет собой C^*-алгебру (относительно операций произведения операторов и перехода к эрмитово сопряженному оператору в качестве инволюции).* $\lhd\rhd$

6.5. Эрмитовы операторы

6.5.1. Определение. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ и $T \in B(H)$. Оператор T называют *эрмитовым* (или *самосопряженным*), если $T = T^*$.

6.5.2. *Теорема Рэлея.* *Для эрмитова оператора T имеет место равенство*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx,\ x)|.$$

$\lhd$ Пусть $t := \sup\{|(Tx,\ x)| : \ \|x\| \le 1\}$. Ясно, что $|(Tx,\ x)| \le \|Tx\|\ \|x\| \le \|T\|$, как только $\|x\| \le 1$. Стало быть, $t \le \|T\|$.

Так как $T = T^*$, то $(Tx,\ y) = (x,\ Ty) = (Ty,\ x)^* = (y,\ Tx)^*$, т. е. $(x,\ y) \mapsto (Tx,\ y)$ — эрмитова форма. Значит, в силу 6.1.3 и 6.1.8

$$4\,\mathrm{Re}(Tx,\ y) = (T(x+y),\ x+y) - (T(x-y),\ x-y) \le$$
$$\le t(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2t(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Если $Tx = 0$, то явно $\|Tx\| \le t$. Пусть $Tx \ne 0$. Тогда при $\|x\| \le 1$ для $y := \|Tx\|^{-1}Tx$ будет

$$\|Tx\| = \|Tx\| \left(\frac{Tx}{\|Tx\|},\ \frac{Tx}{\|Tx\|} \right) =$$
$$= (Tx,\ y) = \mathrm{Re}(Tx,\ y) \le \frac{1}{2}\, t \left(\|x\|^2 + \|Tx/\|Tx\|\ \|^2 \right) \le t,$$

т. е. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \ \|x\| \le 1\} \le t$. $\rhd$