6.4.13. Определение. *Инволютивной алгеброй* или $*$*-алгеброй* (над основным полем $\mathbb{F}$) называют алгебру A *с инволюцией* $*$, т. е. с отображением $a \mapsto a^*$ в A таким, что

(1) $a^{**} = a \ (a \in A)$;

(2) $(a+b)^* = a^* + b^* \ (a,\ b \in A)$;

(3) $(\lambda a)^* = \lambda^* a^* \ (\lambda \in \mathbb{F},\ a \in A)$;

(4) $(ab)^* = b^* a^* \ (a,\ b \in A)$.

Банахову алгебру A с инволюцией $*$, для которой $\|a^*a\| = \|a\|^2$ при всех $a \in A$, называют C^**-алгеброй.*

6.4.14. *Пространство $B(H)$ эндоморфизмов гильбертова пространства H представляет собой C^*-алгебру (относительно операций произведения операторов и перехода к эрмитово сопряженному оператору в качестве инволюции).* $\lhd\rhd$

6.5. Эрмитовы операторы

6.5.1. Определение. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ и $T \in B(H)$. Оператор T называют *эрмитовым* (или *самосопряженным*), если $T = T^*$.

6.5.2. *Теорема Рэлея.* *Для эрмитова оператора T имеет место равенство*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx,\ x)|.$$

$\lhd$ Пусть $t := \sup\{|(Tx,\ x)| :\ \|x\| \le 1\}$. Ясно, что $|(Tx,\ x)| \le \|Tx\|\ \|x\| \le \|T\|$, как только $\|x\| \le 1$. Стало быть, $t \le \|T\|$.

Так как $T = T^*$, то $(Tx,\ y) = (x,\ Ty) = (Ty,\ x)^* = (y,\ Tx)^*$, т. е. $(x,\ y) \mapsto (Tx,\ y)$ — эрмитова форма. Значит, в силу 6.1.3 и 6.1.8

$$4\,\mathrm{Re}(Tx,\ y) = (T(x+y),\ x+y) - (T(x-y),\ x-y) \le$$

$$\le t(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2t(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Если $Tx = 0$, то явно $\|Tx\| \le t$. Пусть $Tx \ne 0$. Тогда при $\|x\| \le 1$ для $y := \|Tx\|^{-1}Tx$ будет

$$\|Tx\| = \|Tx\| \left(\frac{Tx}{\|Tx\|},\ \frac{Tx}{\|Tx\|} \right) =$$

$$= (Tx,\ y) = \mathrm{Re}(Tx,\ y) \le \frac{1}{2}\, t \left(\|x\|^2 + \|Tx/\|Tx\|\ \|^2 \right) \le t,$$

т. е. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| :\ \|x\| \le 1\} \le t$. $\rhd$

6.5.3. Замечание. Как отмечено в доказательстве 6.5.2, каждый эрмитов оператор T в гильбертовом пространстве H порождает эрмитову форму $f_T(x,\ y) := (Tx,\ y)$. Пусть, в свою очередь, f — эрмитова форма, причем для каждого $y \in H$ функционал $f(\cdot,\ y)$ непрерывен. Тогда в силу теоремы Рисса найдется элемент Ty из H такой, что $f(\cdot,\ y) = (Ty)'$. Очевидно, $T \in \mathscr{L}(H)$ и $(x,\ Ty) = f(x,\ y) = f(y,\ x)^* = (y,\ Tx)^* = (Tx,\ y)$. Можно убедиться, что в этом случае $T \in B(H)$ и $T = T^*$. Кроме того, $f = f_T$. Таким образом, в определении 6.5.1 условие $T \in B(H)$ можно заменить условием $T \in \mathscr{L}(H)$ (теорема Хеллингера — Тёплица, см. 7.4.7).

6.5.4. *Критерий Вейля.* *Число λ лежит в спектре эрмитова оператора T в том и только в том случае, если*

$$\inf_{\|x\|=1} \|\lambda x - Tx\| = 0.$$

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $t := \inf\{\|\lambda x - Tx\| :\ x \in H,\ \|x\| = 1\} > 0$. Установим, что $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$. Для каждого $x \in H$ выполнено $\|\lambda x - Tx\| \geq t\|x\|$. Стало быть, во-первых, $(\lambda - T)$ — мономорфизм, во-вторых, $H_0 := \operatorname{im}(\lambda - T)$ — замкнутое подпространство (ибо $\|(\lambda - T)x_m - (\lambda - T)x_k\| \geq t\|x_m - x_k\|$, т. е. «прообраз последовательности Коши фундаментален») и, наконец, в-третьих, $(\lambda - T)^{-1} \in B(H)$, как только $H = H_0$ (в такой ситуации $\|R(T,\ \lambda)\| \leq t^{-1}$). Допустим, вопреки доказываемому, что $H \neq H_0$. Тогда существует $y \in H_0^{\perp}$, для которого $\|y\| = 1$. При всех $x \in H$ будет $0 = (\lambda x - Tx,\ y) = (x,\ \lambda^* y - Ty)$, т. е. $\lambda^* y = Ty$. Далее, $\lambda^* = (Ty,\ y)/(y,\ y)$ и из эрмитовости T выводим $\lambda^* \in \mathbb{R}$. Отсюда $\lambda^* = \lambda$ и $y \in \ker(\lambda - T)$. Получили противоречие: $1 = \|y\| = \|0\| = 0$.

$\Leftarrow$: Если $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$, то имеется резольвента $R(T,\ \lambda) \in B(H)$. Поэтому $\inf\{\|\lambda x - Tx\| :\ \|x\| = 1\} \geq \|R(T,\ \lambda)\|^{-1}$. $\rhd$

6.5.5. *Теорема о границах спектра.* *Пусть T — эрмитов оператор в гильбертовом пространстве. Положим*

$$m_T := \inf_{\|x\|=1} (Tx,\ x), \quad M_T := \sup_{\|x\|=1} (Tx,\ x).$$

Тогда $\operatorname{Sp}(T) \subset [m_T,\ M_T]$ и $m_T,\ M_T \in \operatorname{Sp}(T)$.

$\lhd$ Учитывая эрмитовость оператора $T - \operatorname{Re}\lambda$ в рассматриваемом пространстве H, из тождества

$$\|\lambda x - Tx\|^2 = |\operatorname{Im}\lambda|^2\|x\|^2 + \|Tx - \operatorname{Re}\lambda x\|^2$$

на основании 6.5.4 получаем включение $\operatorname{Sp}(T) \subset \mathbb{R}$. Если $\lambda < m_T$, то для элемента $x \in H$ с единичной нормой $\|x\| = 1$ по неравенству Коши — Буняковского 6.1.5

$$\|\lambda x - Tx\| = \|\lambda x - Tx\| \ \|x\| \geq |(\lambda x - Tx,\ x)| =$$

$$= |\lambda - (Tx,\ x)| = (Tx,\ x) - \lambda \geq m_T - \lambda > 0.$$

Апелляция к 6.5.4 дает: $\lambda \in \operatorname{res}(T)$. Если же $\lambda > M_T$, то аналогичным образом

$$\|\lambda x - Tx\| \geq |(\lambda x - Tx,\ x)| = |\lambda - (Tx,\ x)| = \lambda - (Tx,\ x) \geq \lambda - M_T > 0.$$

Вновь $\lambda \in \operatorname{res}(T)$. Окончательно $\operatorname{Sp}(T) \subset [m_T,\ M_T]$.

Поскольку $(Tx,\ x) \in \mathbb{R}$ при $x \in H$, то в силу 6.5.2

$$\|T\| = \sup\{|(Tx,\ x)| : \ \|x\| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{(Tx,\ x) \vee (-(Tx,\ x)) : \ \|x\| \leq 1\} = M_T \vee (-m_T).$$

Допустим сначала, что $\lambda := \|T\| = M_T$. Если $\|x\| = 1$, то

$$\|\lambda x - Tx\|^2 = \lambda^2 - 2\lambda(Tx,\ x) + \|Tx\|^2 \leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|(Tx,\ x).$$

Иначе говоря, справедлива оценка

$$\inf_{\|x\|=1} \|\lambda x - Tx\|^2 \leq 2\|T\| \inf_{\|x\|=1} (\|T\| - (Tx,\ x)) = 0.$$

Привлекая 6.5.4, заключаем: $\lambda \in \operatorname{Sp}(T)$.

Рассмотрим теперь оператор $S := T - m_T$. Ясно, что $M_S = M_T - m_T \geq 0$ и $m_S = m_T - m_T = 0$. Таким образом, $\|S\| = M_S$ и по уже доказанному $M_S \in \operatorname{Sp}(S)$. Отсюда следует, что M_T входит в $\operatorname{Sp}(T)$, ибо $T = S + m_T$, а $M_T = M_S + m_T$. Осталось заметить, что $m_T = -M_{-T}$ и $\operatorname{Sp}(T) = -\operatorname{Sp}(-T)$. $\rhd$

6.5.6. Следствие. *Норма эрмитова оператора равна радиусу его спектра (и спектральному радиусу).* $\lhd\rhd$

6.5.7. Следствие. *Эрмитов оператор является нулевым в том и только в том случае, если у него нулевой спектр.* $\lhd\rhd$