6.6. Компактные эрмитовы операторы

6.6.1. Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства. Оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ называют *компактным* (при этом пишут $T \in \mathscr{K}(X,\ Y)$), если образ $T(B_X)$ единичного шара B_X в X относительно компактен в Y.

6.6.2. Замечание. Подробное исследование компактных операторов в банаховых пространствах составляет содержание теории Рисса — Шаудера. Эта теория рассмотрена в гл. 8.

6.6.3. *Пусть T — компактный эрмитов оператор. Если $0 \neq \lambda \in \operatorname{Sp}(T)$, то λ — собственное число T, т. е. $\ker(\lambda - T) \neq 0$.*

$\triangleleft$ По критерию Вейля для некоторой последовательности (x_n) такой, что $\|x_n\| = 1$, выполнено $\lambda x_n - Tx_n \to 0$. Не нарушая общности, будем считать, что последовательность (Tx_n) сходится к $y := \lim Tx_n$. Тогда из тождества $\lambda x_n = (\lambda x_n - Tx_n) + Tx_n$ получаем, что существует предел (λx_n) и $y = \lim \lambda x_n$. Следовательно, $Ty = T(\lim \lambda x_n) = \lambda \lim Tx_n = \lambda y$. Так как $\|y\| = |\lambda|$, заключаем, что y — собственный вектор T. $\triangleright$

6.6.4. *Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2$ — различные собственные числа эрмитова оператора T, а $x_1,\ x_2$ — отвечающие λ_1 и λ_2 соответственно собственные векторы (т. е. $x_s \in \ker(\lambda_s - T)$, $s := 1,\ 2$). Тогда x_1 и x_2 ортогональны.*

$$\triangleleft\ (x_1,\ x_2) = \frac{1}{\lambda_1}(Tx_1,\ x_2) = \frac{1}{\lambda_1}(x_1,\ Tx_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x_1,\ x_2)\ \triangleright$$

6.6.5. *Для всякого $\varepsilon > 0$ вне промежутка $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$ может лежать лишь конечное число собственных чисел компактного эрмитова оператора.*

$\triangleleft$ Пусть $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность попарно различных собственных чисел T, причем $|\lambda_n| > \varepsilon$. Пусть, далее, x_n — собственный вектор, отвечающий λ_n и такой, что $\|x_n\| = 1$. В силу 6.6.4 имеем $(x_k,\ x_m) = 0$ при $m \neq k$. Значит,

$$\|Tx_m - Tx_k\|^2 = \|Tx_m\|^2 + \|Tx_k\|^2 = \lambda_m^2 + \lambda_k^2 \geq 2\varepsilon^2,$$

т. е. последовательность $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не является относительно компактной. Получили противоречие с компактностью T. $\triangleright$

6.6.6. *Лемма о разбиении спектра.* *Пусть T — компактный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H и $0 \neq \lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Положим $H_\lambda := \ker(\lambda - T)$. Тогда H_λ конечномерно и разложение $H = H_\lambda \oplus H_\lambda^\perp$ приводит T. При этом имеет место матричное представление*

$$T \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T_\lambda \end{pmatrix},$$

где оператор T_λ — часть T в $H_\lambda^\perp$ — эрмитов и компактен, причем $\mathrm{Sp}(T_\lambda) = \mathrm{Sp}(T) \setminus \{\lambda\}$.

$\lhd$ Подпространство H_λ конечномерно ввиду компактности T. Помимо этого, H_λ инвариантно относительно T. Значит, ортогональное дополнение $H_\lambda^\perp$ подпространства H_λ — инвариантное подпространство $T^*(= T)$, ибо выполнено $(\forall\, x \in H_\lambda)(x,\ h) = 0 \Rightarrow (\forall\, x \in H_\lambda)(T^*h,\ x) = (h,\ Tx) = 0$.

Часть оператора T в H_λ — это явно λ. Компактность и эрмитовость части T_λ оператора T в $H_\lambda^\perp$ несомненны. Столь же очевидно, что при $\mu \neq \lambda$ оператор

$$\mu - T \sim \begin{pmatrix} \mu - \lambda & 0 \\ 0 & \mu - T_\lambda \end{pmatrix}$$

обратим в том и только в том случае, если обратим $\mu - T_\lambda$. Ясно также, что λ не является собственным числом T_λ. $\rhd$

6.6.7. *Теорема Гильберта — Шмидта.* *Пусть H — гильбертово пространство и T — компактный эрмитов оператор в H. Пусть, далее, P_λ — ортопроектор на $\ker(\lambda - T)$ для $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Тогда выполнено*

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T)} \lambda P_\lambda.$$

$\lhd$ Привлекая нужное число раз 6.5.6 и 6.6.6, для любого конечного подмножества θ в $\mathrm{Sp}(T)$ получаем

$$\left\| T - \sum_{\lambda \in \theta} \lambda P_\lambda \right\| = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in (\mathrm{Sp}(T) \cup 0) \setminus \theta\}.$$

Остается сослаться на 6.6.5. $\rhd$

6.6.8. Замечание. Теорема Гильберта — Шмидта содержит новую информацию по сравнению с конечномерным случаем по сути дела лишь тогда, когда оператор T «бесконечномерен», т. е. имеет бесконечномерный образ или, что то же самое, если $H_0^\perp$ — бесконечномерное пространство ($H_0 := \ker T$). Действительно, если оператор T конечномерен, т. е. имеет конечномерный образ, то подпространство $H_0^\perp$ изоморфно этому образу и, стало быть,

$$T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k' \otimes e_k,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — ненулевые точки спектра T, «взятые с учетом кратности», а $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормальный базис в $H_0^\perp$, выбранный должным образом.

Теорема Гильберта — Шмидта показывает, что с точностью до замены суммы рядом бесконечномерные компактные эрмитовы операторы устроены так же, как и конечномерные. В самом деле, при $\lambda \neq \mu$, где λ, μ — ненулевые точки спектра T, собственные подпространства H_λ и H_μ конечномерны и ортогональны. При этом гильбертова сумма $\oplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(T) \setminus 0} H_\lambda$ равна $H_0^\perp = \operatorname{cl} \operatorname{im} T$, ибо $H_0 = (\operatorname{im} T)^\perp$. Строя «по порядку» базисы в конечномерных пространствах H_λ (перенумеровывая собственные числа «в порядке убывания модулей и с учетом кратности», т. е. полагая $\lambda_1 := \lambda_2 := \dots := \lambda_{\dim H_{\lambda_1}} := \lambda_1$; $\lambda_{\dim H_{\lambda_1+1}} := \dots := \lambda_{\dim H_{\lambda_1} + \dim H_{\lambda_2}} := \lambda_2$ и т. д.), получаем разложение $H = H_0 \oplus H_{\lambda_1} \oplus H_{\lambda_2} \oplus \dots$ и представление

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k' \otimes e_k,$$

где ряд суммируется в операторной норме. ◁▷

6.6.9. ***Теорема об общем виде компактного оператора.*** *Пусть $T \in \mathscr{K}(H_1, H_2)$ — бесконечномерный компактный оператор, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2. Существуют ортонормальные семейства $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в H_1, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в H_2 и семейство чисел $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}_+ \setminus 0$, $\mu_k \downarrow 0$, для которых справедливо представление*

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k e_k' \otimes f_k.$$

◁ Положим $S := T^*T$. Понятно, что $S \in B(H_1)$ и S компактен. Помимо этого, $(Sx,\ x) = (T^*Tx,\ x) = (Tx,\ Tx) = \|Tx\|^2$. Значит, в силу 6.4.6, S эрмитов и $H_0 := \ker S = \ker T$. Отметим также, что $\operatorname{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ по теореме 6.5.5.

Пусть $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормальный базис в $H_0^\perp$ из собственных векторов S и $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — соответствующая убывающая последовательность положительных собственных значений $\lambda_k > 0,\ k \in \mathbb{N}$ (ср. 6.6.8). Тогда элемент $x \in H_1$ можно разложить в ряд Фурье

$$x - P_{H_0}x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e_k)e_k.$$

Таким образом, учитывая, что $TP_{H_0} = 0$, и полагая $\mu_k := \sqrt{\lambda_k}$ и $f_k := \mu_k^{-1}Te_k$, получаем

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e_k)Te_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e_k)\frac{\mu_k}{\mu_k}Te_k = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x,\ e_k)f_k.$$

Семейство $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ортонормально, ибо

$$(f_n,\ f_m) = \left(\frac{Te_n}{\mu_n},\ \frac{Te_m}{\mu_m}\right) = \frac{1}{\mu_n\mu_m}(Te_n,\ Te_m) =$$

$$= \frac{1}{\mu_n\mu_m}(T^*Te_n,\ e_m) = \frac{1}{\mu_n\mu_m}(Se_n,\ e_m) =$$

$$= \frac{1}{\mu_n,\ \mu_m}(\lambda_n e_n,\ e_m) = \frac{\mu_n}{\mu_m}(e_n,\ e_m).$$

Привлекая теперь последовательно теорему Пифагора и неравенство Бесселя, выводим:

$$\left\|\left(T - \sum_{k=1}^{n}\mu_k e_k' \otimes f_k\right)x\right\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu_k(x,\ e_k)f_k\right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\mu_k^2|(x,\ e_k)|^2 \le \lambda_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|(x,\ e_k)|^2 \le \lambda_{n+1}\|x\|^2.$$

Окончательно, учитывая соотношение $\lambda_k \downarrow 0$, имеем

$$\left\| T - \sum_{k=1}^{n} \mu_k e'_k \otimes f_k \right\| \le \mu_{n+1} \to 0. \ \triangleright$$

6.6.10. Замечание. Теорема 6.6.9 означает, в частности, что компактные операторы (и только они) суть точки прикосновения множества конечномерных операторов. Этот факт выражают еще и так: «гильбертово пространство обладает свойством аппроксимации».

Упражнения

6.1. Найти крайние точки шара гильбертова пространства.

6.2. Выяснить, какие из классических банаховых пространств гильбертовы, а какие — нет.

6.3. Будет ли гильбертовым фактор-пространство гильбертова пространства?

6.4. Каждое ли банахово пространство вкладывается в гильбертово пространство?

6.5. Может ли быть гильбертовым пространство ограниченных эндоморфизмов гильбертова пространства?

6.6. Описать второе ортогональное дополнение к множеству.

6.7. Доказать, что ни один гильбертов базис бесконечномерного гильбертова пространства не является базисом Гамеля.

6.8. Построить на отрезке наилучшее приближение в метрике L_2 полинома степени $n+1$ полиномами степени не выше n.

6.9. Доказать, что $x \perp y$ в том и только в том случае, если $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ и $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

6.10. Для ограниченного оператора T установить соотношения

$$(\ker T)^{\perp} = \operatorname{cl} \operatorname{im} T^*, \quad (\operatorname{im} T)^{\perp} = \ker T^*.$$

6.11. Выяснить связи между эрмитовыми формами и эрмитовыми операторами.

6.12. Найти эрмитово сопряженные операторы к операторам сдвига, умножения, к конечномерному оператору.

6.13. Доказать, что оператор в гильбертовом пространстве компактен в том и только в том случае, если компактен эрмитово сопряженный к нему оператор. Как связаны соответствующие канонические представления этих операторов?