Глава 7

Принципы банаховых пространств

7.1. Основной принцип Банаха

7.1.1. *Лемма о топологическом строении выпуклого множества.* *Пусть* U *— выпуклое множество с непустой внутренностью в (мульти)нормированном пространстве:* $\operatorname{int} U \neq \varnothing$. *Тогда*

(1) $0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow \alpha \operatorname{cl} U + (1-\alpha) \operatorname{int} U \subset \operatorname{int} U$;

(2) $\operatorname{core} U = \operatorname{int} U$;

(3) $\operatorname{cl} U = \operatorname{cl} \operatorname{int} U$;

(4) $\operatorname{int} \operatorname{cl} U = \operatorname{int} U$.

$\triangleleft$ (1) Для $u_0 \in \operatorname{int} U$ в силу 5.2.10 множество $\operatorname{int} U - u_0$ — открытая окрестность нуля. Отсюда при $0 \leq \alpha < 1$ получаем

$$\alpha \operatorname{cl} U \subset \operatorname{cl} \alpha U \subset \alpha U + (1-\alpha)(\operatorname{int} U - u_0) =$$

$$= \alpha U + (1-\alpha) \operatorname{int} U - (1-\alpha) u_0 \subset$$

$$\subset \alpha U + (1-\alpha) U - (1-\alpha) u_0 \subset U - (1-\alpha) u_0.$$

Таким образом, $(1-\alpha)u_0 + \alpha \operatorname{cl} U \subset U$ и, стало быть, U содержит $(1-\alpha) \operatorname{int} U + \alpha \operatorname{cl} U$. Последнее множество открыто, ибо представляет собой результат сложения $\alpha \operatorname{cl} U$ с открытым множеством $(1-\alpha) \operatorname{int} U$.

(2) Несомненно, что $\operatorname{int} U \subset \operatorname{core} U$. Если же $u_0 \in \operatorname{int} U$ и $u \in \operatorname{core} U$, то для некоторых $u_1 \in U$ и $0 < \alpha < 1$ будет $u = \alpha u_0 + (1-\alpha) u_1$. Поскольку $u_1 \in \operatorname{cl} U$, на основании (1) заключаем: $u \in \operatorname{int} U$.

(3) Понятно, что $\operatorname{cl}\operatorname{int} U \subset \operatorname{cl} U$, ибо $\operatorname{int} U \subset U$. Если, в свою очередь, $u \in \operatorname{cl} U$, то, выбрав $u_0 \in \operatorname{int} U$ и положив $u_\alpha := \alpha u_0 + (1-\alpha)u$, видим: $u_\alpha \to u$ при $\alpha \to 0$ и $u_\alpha \in \operatorname{int} U$, когда $0 < \alpha < 1$. Итак, по построению $u \in \operatorname{cl}\operatorname{int} U$.

(4) Из включений $\operatorname{int} U \subset U \subset \operatorname{cl} U$ вытекает, что $\operatorname{int} U \subset \operatorname{int}\operatorname{cl} U$. Если теперь $u \in \operatorname{int}\operatorname{cl} U$, то, в силу (2), $u \in \operatorname{core}\operatorname{cl} U$. Значит, вновь выделяя $u_0 \in \operatorname{int} U$, подыщем $u_1 \in \operatorname{cl} U$ и $0 < \alpha < 1$, для которых $u = \alpha u_0 + (1-\alpha)u_1$. Привлекая (1), окончательно выводим: $u \in \operatorname{int} U$. $\triangleright$

7.1.2. Замечание. В случае конечномерности рассматриваемого пространства условие $\operatorname{int} U \neq \varnothing$ в пунктах 7.1.1 (2) и 7.1.1 (4) можно опустить. В бесконечномерной ситуации наличие внутренней точки, как показывают многочисленные примеры, — это существенное требование. В частности, так обстоит дело при $U := B_{c_0} \cap X$, где c_0 — пространство сходящихся к нулю последовательностей, а X — подпространство финитных последовательностей в c_0, т. е. прямая сумма счетного числа экземпляров основного поля. В самом деле, бесспорно, $\operatorname{core} U = \varnothing$ и в то же время $\operatorname{cl} U = B_{c_0}$. $\triangleleft\triangleright$

7.1.3. Определение. Множество U в (мульти)нормированном пространстве X называют *идеально выпуклым*, если U выдерживает образование *счетных выпуклых комбинаций*. Точнее говоря, U идеально выпукло, если, каковы бы ни были последовательности $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ и $u_n \in U$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ сходится в X к элементу u, выполнено $u \in U$.

7.1.4. Примеры.

(1) *Параллельный (на вектор u_0) перенос $x \mapsto x + u_0$ «сохраняет» идеальную выпуклость.*

(2) *Замкнутое выпуклое множество идеально выпукло.*

(3) *Открытое выпуклое множество идеально выпукло.*

$\triangleleft$ В самом деле, пусть U открыто и выпукло. Если $U = \varnothing$, то доказывать нечего. Если же $U \neq \varnothing$, то по 7.1.4 (1) можно считать, что $0 \in U$ и, значит, $U = \{p_U < 1\}$, где p_U — функционал Минковского множества U. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательности в U и в $\mathbb{R}_+$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ и элемент $u := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ не попал в U. В силу 7.1.4 (2), u лежит в $\operatorname{cl} U = \{p_U \leq 1\}$ и, стало быть, $p_U(u) = 1$. С другой стороны, ясно, что $p_U(u) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_U(u_n) \leq 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ (ср. 7.2.1). Итак, $0 =$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \alpha_n p_U(u_n)) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1 - p_U(u_n))$. Отсюда $\alpha_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. $\triangleright$

(4) *Пересечение произвольного семейства идеально выпуклых множеств идеально выпукло.*

(5) *Выпуклое подмножество конечномерного пространства идеально выпукло.* $\triangleleft\triangleright$

7.1.5. *Основной принцип Банаха.* *В банаховом пространстве идеально выпуклое множество с поглощающим замыканием является окрестностью нуля.*

$\triangleleft$ Пусть U — такое множество. По условию для рассматриваемого банахова пространства X выполнено $X = \cup_{n\in\mathbb{N}}\, n \operatorname{cl} U$. По теореме Бэра X — нетощее множество и, стало быть, найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $\operatorname{int} n \operatorname{cl} U \neq \varnothing$. Таким образом, $\operatorname{int}\operatorname{cl} U = 1/n \operatorname{int} n \operatorname{cl} U \neq \varnothing$. Нам известно, что $0 \in \operatorname{core}\operatorname{cl} U$. Значит, на основании 7.1.1 заключаем: $0 \in \operatorname{int}\operatorname{cl} U$. Иными словами, существует $\delta > 0$ такое, что $\operatorname{cl} U \supset \delta B_X$. Следовательно, имеет место соотношение:

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \operatorname{cl}\frac{1}{\varepsilon}U \supset \frac{\delta}{\varepsilon}B_X.$$

С помощью приведенной импликации проверим, что $U \supset \delta/2\, B_X$.

Пусть $x_0 \in \delta/2\, B_X$. Полагая $\varepsilon := 2$, выберем $y_1 \in 1/\varepsilon\, U$ из условия $\|y_1 - x_0\| \leq 1/2\varepsilon\,\delta$. Получаем элемент $u_1 \in U$, для которого $\|1/2\, u_1 - x_0\| \leq 1/2\varepsilon\,\delta = 1/4\,\delta$.

Полагая теперь $x_0 := -1/2\, u_1 + x_0$ и $\varepsilon := 4$ и применяя предыдущие рассуждения, обнаруживаем элемент $u_2 \in U$ такой, что $\|1/4\, u_2 + 1/2\, u_1 - x_0\| \leq 1/2\varepsilon\,\delta = 1/8\,\delta$. Продолжая приведенный процесс по индукции, строим последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в U, обладающую тем свойством, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n\, u_n$ сходится к x_0. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$ и множество U идеально выпукло, выводим: $x_0 \in U$. $\triangleright$

7.1.6. *В банаховом пространстве у идеально выпуклого множества совпадают ядро, внутренность, ядро замыкания и внутренность замыкания.*

$\triangleleft$ Ясно, что $\operatorname{int} U \subset \operatorname{core} U \subset \operatorname{core}\operatorname{cl} U$. Если $u \in \operatorname{core}\operatorname{cl} U$, то $\operatorname{cl}(U - u) = \operatorname{cl} U - u$ — поглощающее множество. При параллельном переносе идеально выпуклое множество перейдет в идеально выпуклое множество (см. 7.1.4 (1)). Значит, $U - u$ — окрестность нуля по основному принципу Банаха 7.1.5. В силу 5.2.10, u входит в $\operatorname{int} U$. Итак, $\operatorname{int} U = \operatorname{core} U = \operatorname{core} \operatorname{cl} U$. Привлекая 7.1.1, имеем $\operatorname{int} \operatorname{cl} U = \operatorname{int} U$. $\triangleright$

7.1.7. *Ядро и внутренность замкнутого выпуклого множества в банаховом пространстве совпадают.*

$\triangleleft$ Замкнутое выпуклое множество идеально выпукло. $\triangleright$

7.1.8. Замечание. Анализ 7.1.5 показывает, что условие банаховости в 7.1.7 использовано не в полной мере. Существуют примеры неполных нормированных пространств, в которых ядро и внутренность у любого замкнутого выпуклого множества совпадают. Пространства, обладающие указанным свойством, называют *бочечными*. Понятие бочечности, как видно, имеет смысл и в мультинормированных пространствах. Известны широкие классы бочечных мультинормированных пространств. В частности, таковы пространства Фреше.

7.1.9. Контрпример. *В каждом бесконечномерном банаховом пространстве существуют абсолютно выпуклые поглощающие, но не идеально выпуклые множества.*

$\triangleleft$ Используя, например, базис Гамеля, возьмем разрывный линейный функционал f. Тогда множество $\{|f| \leq 1\}$ — искомое. $\triangleright$

7.2. Принципы ограниченности

7.2.1. *Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал на нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *p равномерно непрерывен;*
(2) *p непрерывен;*
(3) *p непрерывен в нуле;*
(4) *$\{p \leq 1\}$ — окрестность нуля;*
(5) *$\|p\| := \sup\{|p(x)| : \|x\| \leq 1\} < +\infty$, т. е. p ограничен.*

$\triangleleft$ Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) очевидны.

(4) $\Rightarrow$ (5): Найдется $t > 0$, для которого $t^{-1} B_X \subset \{p \leq 1\}$. Поэтому при $\|x\| \leq 1$ будет $p(x) \leq t$. Кроме того, из неравенства $-p(-x) \leq p(x)$ вытекает, что и $-p(x) \leq t$ при $x \in B_X$. Окончательно $\|p\| \leq t < +\infty$.