выпуклое множество (см. 7.1.4 (1)). Значит, $U - u$ — окрестность нуля по основному принципу Банаха 7.1.5. В силу 5.2.10, u входит в $\operatorname{int} U$. Итак, $\operatorname{int} U = \operatorname{core} U = \operatorname{core}\operatorname{cl} U$. Привлекая 7.1.1, имеем $\operatorname{int}\operatorname{cl} U = \operatorname{int} U$. $\triangleright$

7.1.7. *Ядро и внутренность замкнутого выпуклого множества в банаховом пространстве совпадают.*

$\triangleleft$ Замкнутое выпуклое множество идеально выпукло. $\triangleright$

7.1.8. Замечание. Анализ 7.1.5 показывает, что условие банаховости в 7.1.7 использовано не в полной мере. Существуют примеры неполных нормированных пространств, в которых ядро и внутренность у любого замкнутого выпуклого множества совпадают. Пространства, обладающие указанным свойством, называют *бочечными*. Понятие бочечности, как видно, имеет смысл и в мультинормированных пространствах. Известны широкие классы бочечных мультинормированных пространств. В частности, таковы пространства Фреше.

7.1.9. Контрпример. *В каждом бесконечномерном банаховом пространстве существуют абсолютно выпуклые поглощающие, но не идеально выпуклые множества.*

$\triangleleft$ Используя, например, базис Гамеля, возьмем разрывный линейный функционал f. Тогда множество $\{|f| \le 1\}$ — искомое. $\triangleright$

7.2. Принципы ограниченности

7.2.1. *Пусть $p : X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал на нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *p равномерно непрерывен;*
(2) *p непрерывен;*
(3) *p непрерывен в нуле;*
(4) *$\{p \le 1\}$ — окрестность нуля;*
(5) *$\|p\| := \sup\{|p(x)| : \|x\| \le 1\} < +\infty$, т. е. p ограничен.*

$\triangleleft$ Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) очевидны.

(4) $\Rightarrow$ (5): Найдется $t > 0$, для которого $t^{-1}B_X \subset \{p \le 1\}$. Поэтому при $\|x\| \le 1$ будет $p(x) \le t$. Кроме того, из неравенства $-p(-x) \le p(x)$ вытекает, что и $-p(x) \le t$ при $x \in B_X$. Окончательно $\|p\| \le t < +\infty$.

(5) $\Rightarrow$ (1): Из субаддитивности p для $x,\ y \in X$ получаем

$$p(x) - p(y) \le p(x-y); \quad p(y) - p(x) \le p(y-x).$$

Отсюда $|p(x) - p(y)| \le p(x-y) \vee p(y-x) \le \|p\|\,\|x-y\|$. $\rhd$

7.2.2. Теорема Гельфанда. *Полунепрерывный снизу сублинейный функционал, определенный на банаховом пространстве, непрерывен.*

$\lhd$ Пусть p — такой функционал. Тогда множество $\{p \le 1\}$ замкнуто (см. 4.3.8). Поскольку $\operatorname{dom} p$ — это все пространство, то, по 3.8.8, $\{p \le 1\}$ — поглощающее множество. По основному принципу Банаха $\{p \le 1\}$ — окрестность нуля. Осталось применить 7.2.1. $\rhd$

7.2.3. Замечание. Теорему Гельфанда можно более развернуто формулировать следующим образом: «если X — банахово пространство, то эквивалентные условия 7.2.1 (1)–7.2.1 (5) равносильны высказыванию: p полунепрерывен снизу». Отметим здесь же, что требование $\operatorname{dom} p = X$ можно несколько ослабить и считать, что $\operatorname{dom} p$ — нетощее линейное множество, не предполагая при этом полноты X.

7.2.4. Принцип равностепенной непрерывности. *Пусть X — банахово пространство и Y — (полу)нормированное пространство. Для любого непустого множества $\mathscr{E}$ непрерывных линейных операторов из X в Y эквивалентны утверждения:*

(1) *$\mathscr{E}$ поточечно ограничено, т. е. для всякого $x \in X$ ограничено в Y множество $\{Tx :\ T \in \mathscr{E}\}$;*

(2) *$\mathscr{E}$ равностепенно непрерывно.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Положим $q(x) := \sup\{p(Tx)\ :\ \ T \in \mathscr{E}\}$, где p — полунорма в Y. Несомненно, что q — полунепрерывный снизу сублинейный функционал и, стало быть, по теореме Гельфанда $\|q\| < +\infty$, т. е. $p(T(x-y)) \le \|q\|\,\|x-y\|$ при всех $T \in \mathscr{E}$. Значит, $T^{\times -1}(\{d_p \le \varepsilon\}) \subset \{d_{\|\cdot\|} \le \varepsilon/\|q\|\}$ для каждого $T \in \mathscr{E}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Последнее означает равностепенную непрерывность $\mathscr{E}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Очевидно. $\rhd$

7.2.5. Принцип равномерной ограниченности. *Пусть X — банахово пространство и Y — нормированное пространство. Для* *любого непустого семейства* $(T_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *ограниченных операторов эквивалентны утверждения:*

(1) $x \in X \Rightarrow \sup_{\xi\in\Xi} \|T_\xi x\| < +\infty$;

(2) $\sup_{\xi\in\Xi} \|T_\xi\| < +\infty$.

$\lhd$ Достаточно заметить, что 7.2.5 (2) — это другая запись 7.2.4 (2). $\rhd$

7.2.6. *Пусть* X *— банахово пространство и* U *— множество в* X'. *Тогда эквивалентны утверждения:*

(1) *множество* U *ограничено в* X';

(2) *для каждого* $x \in X$ *числовое множество* $\{\langle x \mid x'\rangle : x' \in U\}$ *ограничено в* $\mathbb{F}$.

$\lhd$ Это частный случай 7.2.5. $\rhd$

7.2.7. *Пусть* X *— нормированное пространство и* U *— множество в* X. *Тогда эквивалентны утверждения:*

(1) *множество* U *ограничено в пространстве* X;

(2) *для каждого* $x' \in X'$ *числовое множество* $\{\langle x \mid x'\rangle : x \in U\}$ *ограничено в* $\mathbb{F}$.

$\lhd$ Следует проверить только (2) $\Rightarrow$ (1). Поскольку X' — банахово пространство (см. 5.5.7), а X изометрически вложено в X'' с помощью двойного штрихования (см. 5.1.10 (8)), то требуемое вытекает из 7.2.6. $\rhd$

7.2.8. Замечание. Высказывание 7.2.7 (2) можно переформулировать таким образом: «множество U ограничено в пространстве $(X,\ \sigma(X,\ X'))$» или же, в связи с 5.1.10 (4), так: «множество U слабо ограничено». Двойственность предложений 7.2.6 и 7.2.7 будет полностью вскрыта в 10.4.6.

7.2.9. *Теорема Банаха — Штейнгауза.* *Пусть* X, Y *— банаховы пространства и* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T_n \in B(X,\ Y)$, *— последовательность ограниченных операторов. Положим* $E := \{x \in X : \exists \lim T_n x\}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $E = X$;

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$ *и* E *плотно в* X.

При выполнении эквивалентных условий (1), (2) отображение $T_0 : X \to Y$, *определенное соотношением* $T_0 x := \lim T_n x$, *представляет собой ограниченный линейный оператор и* $\|T_0\| \le \liminf \|T_n\|$.

$\triangleleft$ Если $E = X$, то, конечно же, $\operatorname{cl} E = X$. Кроме того, для каждого $x \in X$ последовательность $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена в Y (ибо она сходится). Значит, по принципу равномерной ограниченности $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$ и (1) $\Rightarrow$ (2) доказано.

Если выполнено (2) и $x \in X$, то для $\overline{x} \in E$ и $m,\ k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\|T_m x - T_k x\| = \|T_m x - T_m\overline{x} + T_m\overline{x} - T_k\overline{x} + T_k\overline{x} - T_k x\| \leq$$

$$\leq \|T_m x - T_m\overline{x}\| + \|T_m\overline{x} - T_k\overline{x}\| + \|T_k\overline{x} - T_k x\| \leq$$

$$\leq \|T_m\|\ \|x - \overline{x}\| + \|T_m\overline{x} - T_k\overline{x}\| + \|T_k\|\ \|\overline{x} - x\| \leq$$

$$\leq 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\ \|x - \overline{x}\| + \|T_m\overline{x} - T_k\overline{x}\|.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем, во-первых, элемент $\overline{x} \in E$, для которого $2\sup_n \|T_n\|\ \|x - \overline{x}\| \leq \varepsilon/2$, а во-вторых, $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\|T_m\overline{x} - T_k\overline{x}\| \leq \varepsilon/2$ при $m,\ k \geq n$. В силу уже установленного $\|T_m x - T_k x\| \leq \varepsilon$, т. е. $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в Y. Поскольку Y — банахово пространство, заключаем: $x \in E$. Итак, (2) $\Rightarrow$ (1) доказано.

Осталось отметить, что для каждого $x \in X$ верно

$$\|T_0 x\| = \lim \|T_n x\| \leq \liminf\ \|T_n\|\ \|x\|,$$

ибо норма — непрерывная функция. $\triangleright$

7.2.10. Замечание. В условиях теоремы Банаха — Штейнгауза из справедливости одного из эквивалентных утверждений 7.2.9 (1) и 7.2.9 (2) можно сделать вывод, что последовательность (T_n) сходится к T_0 равномерно на компактных подмножествах X. Иными словами, для всякого (непустого) компакта Q в X выполнено

$$\sup_{x\in Q}\ \|T_n x - T_0 x\| \to 0.$$

$\triangleleft$ В самом деле, по теореме Гельфанда сублинейный функционал $p_n(x) := \sup\{\|T_m x - T_0 x\|\ :\ \ m \geq n\}$ непрерывен. При этом $p_n(x) \geq p_{n+1}(x)$ и $p_n(x) \to 0$ для каждого $x \in X$. Значит, требуемое вытекает из *теоремы Дини*: «убывающая последовательность непрерывных вещественных функций, поточечно сходящаяся на компакте к непрерывной функции, сходится к этой функции равномерно». $\triangleright$

7.2.11. Принцип фиксации особенности. *Пусть X — банахово пространство и Y — нормированное пространство. Если $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность операторов из $B(X,\ Y)$ и $\sup_n \|T_n\| = +\infty$, то найдется точка $x \in X$, для которой выполнено $\sup_n \|T_n x\| = +\infty$. Множество таких «фиксирующих особенность» точек — вычет.*

$\triangleleft$ Первая часть утверждения содержится в принципе равномерной ограниченности. Вторая часть требует ссылок на 7.2.3 и 4.7.4. $\triangleright$

7.2.12. Принцип сгущения особенностей. *Пусть X — банахово пространство и Y — нормированное пространство. Если $(T_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ — семейство в $B(X,\ Y)$ такое, что $\sup_n \|T_{n,m}\| = +\infty$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, то существует точка $x \in X$, для которой $\sup_n \|T_{n,m}x\| = +\infty$ при всех $m \in \mathbb{N}$.* $\triangleleft\triangleright$

7.3. Принцип идеального соответствия

7.3.1. *Пусть X и Y — векторные пространства. Соответствие $F \subset X \times Y$ выпукло в том и только в том случае, если для $x_1,\ x_2 \in X$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, имеет место включение*

$$F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \supset \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2).$$

$\triangleleft$ $\Leftarrow$: Если $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2) \in F$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то $\alpha_1 y + \alpha_2 y_2 \in F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, поскольку $y_1 \in F(x_1)$ и $y_2 \in F(x_2)$.

$\Rightarrow$: Если x_1 или x_2 не входит в $\operatorname{dom} F$, то доказывать нечего. Если же $x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} F$ и $y_1 \in F(x_1),\ y_2 \in F(x_2)$, то $\alpha_1(x_1,\ y_1) + \alpha_2(x_2,\ y_2) \in F$ при $\alpha_1,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (см. 3.1.2 (8)). $\triangleright$

7.3.2. Замечание. Пусть X, Y — банаховы пространства. Ясно, что в пространстве $X \times Y$ удается многими способами задать норму так, чтобы соответствующая топология совпадала с произведением топологий τ_X и τ_Y. Например, можно положить $\|(x,\ y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$, т. е. ввести в $X \times Y$ норму как в сумму пространств X и Y по типу 1. Отметим здесь же, что понятие «идеально выпуклое множество» имеет линейно топологический характер, т. е. выделяемый этим понятием класс объектов не зависит от способа задания топологии (в частности, не меняется при переходе к эквивалентной (мульти)норме). В этой связи корректным является следующее определение.