7.2.11. Принцип фиксации особенности. *Пусть X — банахово пространство и Y — нормированное пространство. Если $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность операторов из $B(X,\ Y)$ и $\sup_n\ \|T_n\| = +\infty$, то найдется точка $x \in X$, для которой выполнено $\sup_n \|T_n x\| = +\infty$. Множество таких «фиксирующих особенность» точек — вычет.*

$\lhd$ Первая часть утверждения содержится в принципе равномерной ограниченности. Вторая часть требует ссылок на 7.2.3 и 4.7.4. $\rhd$

7.2.12. Принцип сгущения особенностей. *Пусть X — банахово пространство и Y — нормированное пространство. Если $(T_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ — семейство в $B(X,\ Y)$ такое, что $\sup_n \|T_{n,m}\| = +\infty$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, то существует точка $x \in X$, для которой $\sup_n \|T_{n,m}x\| = +\infty$ при всех $m \in \mathbb{N}$.* $\lhd\rhd$

7.3. Принцип идеального соответствия

7.3.1. *Пусть X и Y — векторные пространства. Соответствие $F \subset X \times Y$ выпукло в том и только в том случае, если для $x_1,\ x_2 \in X$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, имеет место включение*

$$F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \supset \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2).$$

$\lhd$ $\Leftarrow$: Если $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2) \in F$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то $\alpha_1 y + \alpha_2 y_2 \in F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, поскольку $y_1 \in F(x_1)$ и $y_2 \in F(x_2)$.

$\Rightarrow$: Если x_1 или x_2 не входит в $\operatorname{dom} F$, то доказывать нечего. Если же $x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} F$ и $y_1 \in F(x_1),\ y_2 \in F(x_2)$, то $\alpha_1(x_1,\ y_1) + \alpha_2(x_2,\ y_2) \in F$ при $\alpha_1,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (см. 3.1.2 (8)). $\rhd$

7.3.2. Замечание. Пусть X, Y — банаховы пространства. Ясно, что в пространстве $X \times Y$ удается многими способами задать норму так, чтобы соответствующая топология совпадала с произведением топологий τ_X и τ_Y. Например, можно положить $\|(x,\ y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$, т. е. ввести в $X \times Y$ норму как в сумму пространств X и Y по типу 1. Отметим здесь же, что понятие «идеально выпуклое множество» имеет линейно топологический характер, т. е. выделяемый этим понятием класс объектов не зависит от способа задания топологии (в частности, не меняется при переходе к эквивалентной (мульти)норме). В этой связи корректным является следующее определение.

7.3.3. Определение. Соответствие $F \subset X \times Y$, где X и Y — банаховы пространства, называют *идеально выпуклым*, или, короче, *идеальным*, если F — идеально выпуклое множество.

7.3.4. ***Лемма об идеальном соответствии.*** *Образ ограниченного идеально выпуклого множества при идеальном соответствии — идеально выпуклое множество.*

$\triangleleft$ Пусть $F \subset X \times Y$ — рассматриваемое соответствие и U — ограниченное идеально выпуклое множество в X. Если $U \cap \operatorname{dom} F = \varnothing$, то $F(U) = \varnothing$ и доказывать ничего не надо. Пусть теперь $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F(U)$, т. е. $y_n \in F(x_n)$, где $x_n \in U$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть, наконец, (α_n) — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ и, кроме того, в Y существует сумма ряда $y := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$. Несомненно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sup \|U\| = \sup \|U\| < +\infty$$

ввиду ограниченности U. Поскольку X полно, то на основании 5.5.3 в X есть элемент $x := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Следовательно, в пространстве $X \times Y$ выполнено

$$(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n,\ y_n).$$

Используя последовательно идеальную выпуклость F и U, выводим: $(x,\ y) \in F$ и $x \in U$. Стало быть, $y \in F(U)$. $\triangleright$

7.3.5. ***Принцип идеального соответствия.*** *Пусть X и Y — банаховы пространства, $F \subset X \times Y$ — идеальное соответствие и $(x,\ y) \in F$. Соответствие F отображает окрестности точки x на окрестности точки y в том и только в том случае, если $y \in \operatorname{core} F(X)$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Очевидно.

$\Leftarrow$: С учетом 7.1.4 можно считать: $x = 0$ и $y = 0$. Поскольку каждая окрестность нуля U содержит εB_X для некоторого $\varepsilon > 0$, достаточно рассмотреть случай $U := B_X$. Так как U — ограниченное множество, на основании 7.3.4, $F(U)$ идеально выпукло. Для завершения доказательства можно проверить, что $F(U)$ — поглощающее множество и сослаться на 7.1.6.

Возьмем произвольный элемент $\overline{y} \in Y$. Раз известно, что $0 \in \operatorname{core} F(X)$, то найдется $\alpha \in \mathbb{R}_+$, для которого $\alpha\overline{y} \in F(X)$. Иначе говоря, для подходящего $\overline{x} \in X$ справедливо $\alpha\overline{y} \in F(X)$. Если $\|\overline{x}\| \leq 1$, то доказывать нечего. Если же $\|\overline{x}\| > 1$, то $\lambda := \|\overline{x}\|^{-1} < 1$. Отсюда, привлекая 7.3.1, выводим:

$$
\begin{aligned}
&\alpha\lambda\overline{y} = (1-\lambda)0 + \lambda\alpha\overline{y} \in (1-\lambda)F(0) + \lambda F(\overline{x}) \subset \\
&\subset F((1-\lambda)0 + \lambda\overline{x}) = F(\lambda\overline{x}) \subset F(B_X) = F(U).
\end{aligned}
$$

Здесь мы учли, что $\|\lambda\overline{x}\| = 1$, т. е. $\lambda\overline{x} \in B_X$. $\triangleright$

7.3.6. Замечание. Свойство F, описываемое в 7.3.5, именуют *открытостью* F *в точке* $(x,\ y)$.

7.3.7. Замечание. Говоря формально, принцип идеального соответствия слабее основного принципа Банаха 7.1.5. Тем не менее соответствующий зазор невелик и легко устраним. Именно заключение 7.3.5 останется верным, если считать, что $y \in \operatorname{core} \operatorname{cl} F(X)$, потребовав дополнительно идеальной выпуклости $F(X)$. Последнее требование не слишком обременительно и в силу 7.3.4 заведомо выполнено, если эффективное множество $\operatorname{dom} F$ ограничено. Указанная незначительная модификация 7.3.5 содержит 7.1.5 в качестве частного случая. В этой связи 7.3.5 обычно называют *основным принципом Банаха для соответствий.*

7.3.8. Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства и $F \subset X \times Y$ — соответствие. Соответствие F называют *замкнутым*, если F — замкнутое множество.

7.3.9. Замечание. По понятным причинам о замкнутом соответствии часто говорят как о соответствии с «замкнутым графиком».

7.3.10. *Соответствие F замкнуто в том и только в том случае, если для любых последовательностей (x_n) в X и (y_n) в Y таких, что $x_n \in \operatorname{dom} F$, $y_n \in F(x_n)$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, выполнено $x \in \operatorname{dom} F$ и $y \in F(x)$.* $\triangleleft\triangleright$

7.3.11. *Пусть X и Y — банаховы пространства и $F \subset X \times Y$ — замкнутое выпуклое соответствие. Пусть, далее, $(x,\ y) \in F$ и $y \in \operatorname{core} \operatorname{im} F$. Соответствие F отображает окрестности точки x на окрестности точки y.*

$\triangleleft$ Замкнутое выпуклое множество идеально выпукло, так что всё содержится в 7.3.5. $\triangleright$

7.3.12. Определение. Соответствие $F \subset X \times Y$ называют *открытым*, если образ открытого множества в X — открытое множество в Y.

7.3.13. *Принцип открытости.* *Пусть X, Y — банаховы пространства и $F \subset X \times Y$ — идеальное соответствие, причем $\operatorname{im} F$ — открытое множество. Тогда F — открытое соответствие.*

$\triangleleft$ Пусть U — открытое множество в X. Если $y \in F(U)$, то найдется $x \in U$, для которого $(x,\ y) \in F$. Ясно, что $y \in \operatorname{core} \operatorname{im} F$. Поскольку выполнены условия 7.3.5, то $F(U)$ — окрестность y, ибо U — окрестность x. Последнее означает, что $F(U)$ — открытое множество. $\triangleright$

7.4. Теоремы о гомоморфизме и замкнутом графике

7.4.1. Определение. Оператор T из $\mathscr{L}(X,\ Y)$ называют *гомоморфизмом*, если $T \in B(X,\ Y)$ и T — открытое соответствие.

7.4.2. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и T — гомоморфизм из X в Y. Тогда $\operatorname{im} T = Y$ и Y — банахово пространство.*

$\triangleleft$ То, что $\operatorname{im} T = Y$, очевидно. Если заранее известно, что T — мономорфизм, то выполнено $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y,\ X)$. Из-за открытости T оператор T^{-1} входит в $B(Y,\ X)$, что обеспечивает полноту Y (прообраз последовательности Коши — последовательность Коши в прообразе). В общем случае рассмотрим кообраз $\operatorname{coim} T := X/\ker T$, наделенный фактор-нормой. На основании 5.5.4, $\operatorname{coim} T$ — банахово пространство. Кроме того, в силу 2.3.11 имеется единственное снижение $\overline{T}$ оператора T на $\operatorname{coim} T$. Учитывая определение фактор-нормы и 5.1.3, заключаем, что оператор $\overline{T}$ — гомоморфизм. Мономорфизмом этот оператор является по построению. Осталось заметить, что $\operatorname{im} \overline{T} = \operatorname{im} T = Y$. $\triangleright$

7.4.3. Замечание. Относительно снижения $\overline{T} : \operatorname{coim} T \to Y$ оператора T можно утверждать, что $\|T\| = \|\overline{T}\|$. $\triangleleft\triangleright$

7.4.4. *Теорема Банаха о гомоморфизме.* *Ограниченный эпиморфизм одного банахова пространства на другое является гомоморфизмом.*