7.3.12. Определение. Соответствие $F \subset X \times Y$ называют *открытым*, если образ открытого множества в X — открытое множество в Y.

7.3.13. *Принцип открытости.* *Пусть X, Y — банаховы пространства и $F \subset X \times Y$ — идеальное соответствие, причем $\operatorname{im} F$ — открытое множество. Тогда F — открытое соответствие.*

$\triangleleft$ Пусть U — открытое множество в X. Если $y \in F(U)$, то найдется $x \in U$, для которого $(x,\ y) \in F$. Ясно, что $y \in \operatorname{core} \operatorname{im} F$. Поскольку выполнены условия 7.3.5, то $F(U)$ — окрестность y, ибо U — окрестность x. Последнее означает, что $F(U)$ — открытое множество. $\triangleright$

7.4. Теоремы о гомоморфизме и замкнутом графике

7.4.1. Определение. Оператор T из $\mathscr{L}(X,\ Y)$ называют *гомоморфизмом*, если $T \in B(X,\ Y)$ и T — открытое соответствие.

7.4.2. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и T — гомоморфизм из X в Y. Тогда $\operatorname{im} T = Y$ и Y — банахово пространство.*

$\triangleleft$ То, что $\operatorname{im} T = Y$, очевидно. Если заранее известно, что T — мономорфизм, то выполнено $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y,\ X)$. Из-за открытости T оператор T^{-1} входит в $B(Y,\ X)$, что обеспечивает полноту Y (прообраз последовательности Коши — последовательность Коши в прообразе). В общем случае рассмотрим кообраз $\operatorname{coim} T := X/\ker T$, наделенный фактор-нормой. На основании 5.5.4, $\operatorname{coim} T$ — банахово пространство. Кроме того, в силу 2.3.11 имеется единственное снижение $\overline{T}$ оператора T на $\operatorname{coim} T$. Учитывая определение фактор-нормы и 5.1.3, заключаем, что оператор $\overline{T}$ — гомоморфизм. Мономорфизмом этот оператор является по построению. Осталось заметить, что $\operatorname{im} \overline{T} = \operatorname{im} T = Y$. $\triangleright$

7.4.3. Замечание. Относительно снижения $\overline{T} : \operatorname{coim} T \to Y$ оператора T можно утверждать, что $\|T\| = \|\overline{T}\|$. $\triangleleft\triangleright$

7.4.4. *Теорема Банаха о гомоморфизме.* *Ограниченный эпиморфизм одного банахова пространства на другое является гомоморфизмом.*

$\lhd$ Пусть $T \in B(X,\ Y)$ и $\operatorname{im} T = Y$. Применяя принцип открытости к соответствию T, получаем требуемое. $\rhd$

7.4.5. Теорема Банаха об изоморфизме. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in B(X,\ Y)$. Если T — изоморфизм векторных пространств X и Y, т. е. $\ker T = 0$ и $\operatorname{im} T = Y$, то $T^{-1} \in B(Y,\ X)$.*

$\lhd$ Частный случай 7.4.4. $\rhd$

7.4.6. Замечание. Коротко теорему 7.4.5 формулируют так: «непрерывный изоморфизм банаховых пространств является топологическим изоморфизмом». Отметим здесь же, что эту теорему иногда называют «принципом корректности» и выражают словами: «если уравнение $Tx = y$, где $T \in B(X,\ Y)$, а X, Y — банаховы пространства, однозначно разрешимо при любой правой части, то решение x непрерывно зависит от правой части y».

7.4.7. Теорема Банаха о замкнутом графике. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — замкнутый линейный оператор. Тогда T непрерывен.*

$\lhd$ Соответствие T^{-1} идеально, и $T^{-1}(Y) = X$. $\rhd$

7.4.8. Следствие. *Пусть X, Y — банаховы пространства и задан $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $T \in B(X,\ Y)$;

(2) *для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X и $x \in X$ таких, что $x_n \to x$ и $Tx_n \to y$, где $y \in Y$, выполнено $y = Tx$.*

$\lhd$ (2) есть переформулировка замкнутости T. $\rhd$

7.4.9. Определение. Подпространство X_1 банахова пространства X называют *дополняемым* (реже — *топологически дополняемым*), если X_1 замкнуто и, кроме того, найдется замкнутое подпространство X_2 такое, что $X = X_1 \oplus X_2$ (т. е. $X_1 \wedge X_2 = 0$, $X_1 \vee X_2 = X$).

7.4.10. Принцип дополняемости. *Для подпространства X_1 банахова пространства X эквивалентны утверждения:*

(1) *X_1 дополняемо;*

(2) *X_1 есть область значений ограниченного проектора, т. е. найдется $P \in B(X)$ такой, что $P^2 = P$ и $\operatorname{im} P = X_1$.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть P — проектор X на X_1 параллельно X_2 (см. 2.2.9 (4)). Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в X и $x_n \to x$, а $Px_n \to y$. Ясно, что $Px_n \in X_1$ для $n \in \mathbb{N}$. В силу замкнутости X_1, по 4.1.19, $y \in X_1$. Аналогично из условия ($x_n - Px_n \in X_2$ для $n \in \mathbb{N}$) вытекает, что $x - y \in X_2$. Значит, $P(x - y) = 0$. Помимо этого, $y = Py$, т. е. $y = Px$. Остается сослаться на 7.4.8.

(2) $\Rightarrow$ (1): Следует проверить только, что $X_1 = \operatorname{im} P$ замкнуто. Возьмем последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X_1 такую, что $x_n \to x$ в X. Тогда $Px_n \to Px$ ввиду ограниченности P. Имеем $Px_n = x_n$, ибо $x_n \in \operatorname{im} P$, а P идемпотентен. Окончательно $x = Px$, т. е. $x \in X_1$, что и нужно. $\triangleright$

7.4.11. Примеры.

(1) *Конечномерное подпространство дополняемо.* $\triangleleft\triangleright$

(2) *Пространство c_0 не дополняемо в l_∞.*

$\triangleleft$ Для простоты будем работать с $X := l_\infty(\mathbb{Q})$ и $Y := c_0(\mathbb{Q})$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Для $t \in \mathbb{R}$ подберем последовательность попарно различных отличных от t рациональных чисел $(\bar{t}_n)$ такую, что $\bar{t}_n \to t$. Пусть $Q_t := \{\bar{t}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Подчеркнем, что $Q_{t'} \cap Q_{t''}$ — конечное множество при $t' \neq t''$.

Пусть χ_t — класс, содержащий характеристическую функцию Q_t в фактор-пространстве X/Y и $V := \{\chi_t : t \in R\}$. Поскольку $\chi_{t'} \neq \chi_{t''}$ при $t' \neq t''$, множество V несчетно.

Возьмем $f \in (X/Y)'$ и положим $V_f := \{v \in V : f(v) \neq 0\}$. Видно, что $V_f = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_f(n)$, где $V_f(n) := \{v \in V : |f(v)| \geq 1/n\}$. Если $m \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_m \in V_f(n)$ попарно различные, $v_1, \dots, v_m \in V_f(n)$ и $\alpha_k := |f(v_k)|/f(v_k)$, то для $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$ будет $\|x\| \leq 1$ и $\|f\| \geq |f(x)| = |\sum_{k=1}^m \alpha_k f(v_k)| = |\sum_{k=1}^m |f(v_k)|| \geq m/n$. Таким образом, $V_f(n)$ — конечное множество.

Следовательно, V_f счетно. Отсюда следует, что для каждого счетного множества $F \subset (X/Y)'$ существует элемент $v \in V$, для которого $(\forall f \in F)\ f(v) = 0$.

В то же время счетный набор координатных проекций $\delta_q : x \mapsto x(q)$ $(q \in \mathbb{Q})$ тотален на $l_\infty(\mathbb{Q})$, т. е. $(\forall q \in \mathbb{Q})$ $\delta_q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ при $x \in l_\infty(\mathbb{Q})$. Осталось сопоставить сделанные наблюдения. $\triangleright$

(3) Каждое замкнутое подпространство гильбертова пространства дополняемо (по 6.2.6). Оказывается, что если в некотором банаховом пространстве X таком, что $\dim X \geq 3$, каждое замкнутое подпространство — область значений некоторого проектора P и $\|P\| \leq 1$, то X изометрично гильбертову пространству (= теорема Какутани). Более глубок следующий факт:

Теорема Линденштраусса — Цафрири. *Любое банахово пространство, в котором каждое замкнутое подпространство дополняемо, (линейно и топологически) изоморфно гильбертову пространству.*

7.4.12. Теорема Сарда об уравнении $\mathscr{X}A = B$. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства; $A \in B(X,\ Y)$, $B \in B(Y,\ Z)$. Пусть, далее, $\operatorname{im} A$ — дополняемое подпространство в Y. Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "B"'] & Y \arrow[d, "\mathscr{X}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого $\mathscr{X} \in B(Y,\ Z)$ в том и только в том случае, если $\ker A \subset \ker B$.

$\lhd$ Следует проверить только $\Leftarrow$. При этом в случае $\operatorname{im} A = Y$ единственный оператор $\mathscr{X}_0 \in \mathscr{L}(Y,\ Z)$ такой, что $\mathscr{X}_0 A = B$, непрерывен. В самом деле, для открытого множества U в Z имеем $\mathscr{X}_0^{-1}(U) = A(B^{-1}(U))$. Множество $B^{-1}(U)$ открыто в силу ограниченности B, и $A(B^{-1}(U))$ открыто по теореме Банаха о гомоморфизме. В общем случае следует построить $\mathscr{X}_0 \in B(\operatorname{im} A,\ Z)$ и в качестве $\mathscr{X}$ взять $\mathscr{X}_0 P$, где P — какой-нибудь непрерывный проектор Y на $\operatorname{im} A$. Существование этого проектора обеспечивает принцип дополняемости. $\rhd$

7.4.13. Замечание. Полнота Z в доказательстве теоремы Сарда не использована.

7.4.14. Теорема Филлипса об уравнении $A\mathscr{X} = B$. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A \in B(Y,\ X)$, $B \in B(Z,\ X)$. Пусть, далее, $\ker A$ — дополняемое подпространство в Y.*

Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "A"'] \\
& Z \arrow[ul, "B"] \arrow[u, "\mathscr{X}"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого $\mathscr{X} \in B(Z,\ Y)$ *в том и только в том случае, если* $\operatorname{im} A \supset \operatorname{im} B$.

$\lhd$ Вновь следует проверить только $\Leftarrow$. Воспользуемся определением дополняемости и представим Y в виде прямой суммы $\ker A$ и Y_0, где Y_0 — замкнутое подпространство. По 5.5.9 (1), Y_0 представляет собой банахово пространство. Рассмотрим след A_0 оператора A на Y_0. Несомненно, что $\operatorname{im} A_0 = \operatorname{im} A \supset \operatorname{im} B$. Значит, по 2.3.13 и 2.3.14 уравнение $A_0 \mathscr{X}_0 = B$ имеет, и притом единственное, решение $\mathscr{X}_0 := A_0^{-1} B$. Нам достаточно доказать, что оператор $\mathscr{X}_0$, являющийся элементом пространства $\mathscr{L}(Z,\ Y_0)$, ограничен.

Оператор $\mathscr{X}_0$ замкнут. В самом деле (ср. 7.4.8), если $z_n \to z$ и $A_0^{-1} B z_n \to y$, то $B z_n \to B z$, поскольку B ограничен. Кроме того, в силу непрерывности A_0 соответствие $A_0^{-1} \subset X \times Y_0$ замкнуто, и, стало быть, по 7.3.10 справедливо равенство $y = A_0^{-1} B z$. $\rhd$

7.4.15. Замечание. Полнота X в доказательстве теоремы Филлипса не использована.

7.4.16. Замечание. Теоремы Сарда и Филлипса находятся в «формальной двойственности», т. е. могут быть получены одна из другой с помощью обращения стрелок и включений и замены ядер образами (ср. 2.3.15).

7.4.17. ***Принцип двух норм.*** *Пусть векторное пространство полно относительно каждой из двух сравнимых между собой норм. Тогда эти нормы эквивалентны.*

$\lhd$ Пусть для определенности $\|\cdot\|_2 \succ \|\cdot\|_1$ в пространстве X. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(X, \|\cdot\|_1) & (X, \|\cdot\|_2) \arrow[l, "I_X"'] \\
& (X, \|\cdot\|_1) \arrow[ul, "I_X"] \arrow[u, "\mathscr{X}"']
\end{tikzcd}$$

По теореме Филлипса некоторый непрерывный оператор $\mathscr{X}$ превращает эту диаграмму в коммутативную. Но такой оператор единствен — это I_X. $\triangleright$

7.4.18. Принцип нормы графика. *Пусть X, Y — банаховы пространства и оператор $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ замкнут. Определим норму графика $\|x\|_{\mathrm{gr}\,T} := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ для $x \in X$. Тогда выполнено $\|\cdot\|_{\mathrm{gr}\,T} \sim \|\cdot\|_X$.*

$\triangleleft$ Следует заметить, что $(X, \|\cdot\|_{\mathrm{gr}\,T})$ — полное пространство. Помимо этого, $\|\cdot\|_{\mathrm{gr}\,T} \geq \|\cdot\|_X$. Осталось сослаться на принцип двух норм. $\triangleright$

7.4.19. Определение. Нормированное пространство X называют ***банаховым образом***, если X служит образом некоторого ограниченного оператора, определенного на каком-либо банаховом пространстве.

7.4.20. Критерий Като. *Пусть X — банахово пространство и $X = X_1 \oplus X_2$, где X_1, $X_2 \in \mathrm{Lat}(X)$. Подпространства X_1 и X_2 замкнуты в том и только в том случае, если каждое из них является банаховым образом.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Следствие принципа дополняемости.

$\Leftarrow$: Пусть Z — какой-либо банахов образ, т. е. для некоторого банахова пространства Y и $T \in B(Y, Z)$ выполнено: $Z = T(Y)$. Переходя, если нужно, к снижению на кообраз, можно считать, что T — изоморфизм. Обозначим $\|z\|_0 := \|T^{-1}z\|_Y$. Ясно, что $(Z, \|\cdot\|_0)$ — банахово пространство и $\|z\| = \|TT^{-1}z\| \leq \|T\|\|T^{-1}z\| = \|T\|\|z\|_0$, т. е. $\|\cdot\|_0 \succ \|\cdot\|_Z$. Применяя описанную конструкцию к X_1 и X_2, приходим к банаховым пространствам $(X_1, \|\cdot\|_1)$ и $(X_2, \|\cdot\|_2)$. При этом $\|\cdot\|_k \succ \|\cdot\|_X$ на X_k при $k := 1, 2$.

Для $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ положим $\|x_1 + x_2\|_0 := \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$. Тем самым в X возникает норма $\|\cdot\|$ более сильная, чем исходная $\|\cdot\|_X$. По построению $(X, \|\cdot\|_0)$ — банахово пространство. Осталось сослаться на 7.4.17. $\triangleright$