7.5. Принцип автоматической непрерывности

7.5.1. *Критерий непрерывности выпуклой функции.* *Рассмотрим выпуклую функцию $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ в (мульти)нормированном пространстве X. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $U := \operatorname{int}\operatorname{dom} f \neq \varnothing$ *и* $f|_U$ *— непрерывная функция;*

(2) *существует непустое открытое множество V такое, что выполнено* $\sup f(V) < +\infty$.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ясно, что $U \neq \varnothing$. Привлекая 7.1.1, легко убеждаемся в том, что у каждой точки $u \in U$ имеется окрестность W, в которой f ограничена сверху, т. е. $t := \sup f(W) < +\infty$. Не нарушая общности, можно считать, что $u := 0$, $f(u) := 0$ и что W — это абсолютно выпуклое множество. В силу выпуклости f для всякого $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такого, что $\alpha \leq 1$, и произвольного $v \in W$ справедливы соотношения:

$$f(\alpha v) = f(\alpha v + (1-\alpha)0) \leq \alpha f(v) + (1-\alpha) f(0) = \alpha f(v);$$

$$f(\alpha v) + \alpha f(-v) \geq f(\alpha v) + f(\alpha(-v)) =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} f(\alpha v) + \frac{1}{2} f(-\alpha v)\right) \geq 2f(0) = 0.$$

Таким образом, выполнено $|f(\alpha W)| \leq \alpha t$, откуда и вытекает непрерывность f в точке $u := 0$. $\rhd$

7.5.2. *Следствие.* *Если $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ и f непрерывна в точке x, то субдифференциал $\partial_x(f)$ содержит только непрерывные функционалы.*

$\lhd$ Если $l \in \partial_x(f)$, то $(\forall \overline{x} \in X)\ l(\overline{x}) \leq l(x) + f(\overline{x}) - f(x)$ и, стало быть, l ограничен сверху на некоторой окрестности точки x. Следовательно, l непрерывен в этой точке по 7.5.1. Привлекая 5.3.7, убеждаемся, что l непрерывен. $\rhd$

7.5.3. *Следствие.* *Каждая выпуклая функция в конечномерном пространстве непрерывна во внутренности своей эффективной области определения.* $\lhd\rhd$

7.5.4. Определение. Функцию $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ называют ***идеально выпуклой***, если ее надграфик $\operatorname{epi} f$ — идеальное соответствие.

7.5.5. Принцип автоматической непрерывности. *Каждая идеально выпуклая функция в банаховом пространстве непрерывна на ядре своей эффективной области определения.*

$\lhd$ Пусть f — такая функция. Если $\operatorname{core}\operatorname{dom} f = \varnothing$, то доказывать нечего. Если же $x \in \operatorname{core}\operatorname{dom} f$, то положим $t := f(x)$ и $F := (\operatorname{epi}\ f)^{-1} \subset \mathbb{R} \times X$. Применяя принцип идеального соответствия, найдем $\delta > 0$ из условия $F(t + B_{\mathbb{R}}) \supset x + \delta B_X$. Отсюда, в частности, вытекает оценка $f(x + \delta B_X) \le t + 1$. На основании 7.5.1, f непрерывна на $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$. Поскольку к тому же $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$, то, по лемме 7.1.1, $\operatorname{core}\operatorname{dom} f = \operatorname{int}\operatorname{dom} f$. $\rhd$

7.5.6. Замечание. Используя 7.3.6, можно показать, что идеально выпуклая функция f, определенная на множестве с непустым ядром в банаховом пространстве, является *локально липшицевой* на $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$. Иными словами, для всякой точки $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ найдутся, во-первых, число $L > 0$, а во-вторых, окрестность U этой точки, для которых $\|f(x) - f(x_0)\| \le L\|x - x_0\|$, как только $x \in U$. $\lhd\rhd$

7.5.7. Следствие. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — идеально выпуклая функция в банаховом пространстве X и $x \in \operatorname{core}\operatorname{dom} f$. Тогда производная по направлениям $f'(x)$ — непрерывный сублинейный функционал и $\partial_x(f) \subset X'$.*

$\lhd$ Нужно дважды воспользоваться принципом автоматической непрерывности. $\rhd$

7.5.8. Замечание. В связи с 7.5.7 при изучении банаховых пространств в субдифференциал любой функции $f : X \to \mathbb{R}^{\cdot}$ в точке x включают только подходящие непрерывные функционалы на X, т. е. полагают

$$\partial_x(f) := \partial_x(f) \cap X'.$$

Аналогичным образом поступают и в (мульти)нормированных пространствах. Если необходимо отличить «старый» (более широкий) субдифференциал, лежащий в $X^{\#}$, от «нового» (более узкого) субдифференциала в X', первый называют *алгебраическим*, а второй — *топологическим*. Указанные в 7.5.2 и 7.5.7 факты в этом смысле часто называют *принципом совпадения алгебраического и топологического субдифференциалов*. Отметим, наконец, что по подобным же причинам в случае, когда $f := p$ — полунорма в X, считают: $|\partial|(p) := |\partial|(p) \cap X'$.

7.5.9. Теорема Хана — Банаха для банаховых пространств. *Пусть $f : Y \to \mathbb{R}^{\cdot}$ — идеально выпуклая функция на банаховом пространстве Y. Пусть, далее, X — нормированное пространство и $T \in B(X,\ Y)$. Если точка $x \in X$ такова, что $Tx \in \operatorname{core}\operatorname{dom} f$, то*

$$\partial_x(f \circ T) = \partial_{Tx}(f) \circ T.$$

$\lhd$ Правая часть доказываемой формулы включена в ее левую часть по очевидным обстоятельствам. Если же l из X' лежит в $\partial_x(f \circ T)$, то по теореме Хана — Банаха 3.5.3 можно подыскать элемент l_1 из алгебраического субдифференциала f в точке Tx, удовлетворяющий соотношению $l = l_1 \circ T$. Осталось заметить, что, в силу 7.5.7, l_1 является элементом Y' и, стало быть, элементом топологического субдифференциала $\partial_{Tx}(f)$. $\rhd$

7.5.10. Теорема Хана — Банаха для непрерывной полунормы. *Пусть X, Y — нормированные пространства, $T \in B(X,\ Y)$ и $p : Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная полунорма. Тогда*

$$|\partial|(p \circ T) = |\partial|(p) \circ T.$$

$\lhd$ Если $l \in |\partial|\ (p \circ T)$, то $l = l_1 \circ T$ для некоторого l_1 из алгебраического субдифференциала полунормы p (см. 3.7.11). Из 7.5.2 вытекает, что l_1 непрерывен. Итак, $|\partial|(p \circ T) \subset |\partial|\ (p) \circ T$. Обратное включение бесспорно. $\rhd$

7.5.11. Принцип непрерывного продолжения. *Пусть X_0 — подпространство в X и l_0 — непрерывный линейный функционал на X_0. Тогда существует непрерывный линейный функционал l на X, продолжающий l_0. (При этом можно считать,что $\|l\| = \|l_0\|$.)*

$\lhd$ Возьмем $p := \|l_0\|\ \|\cdot\|$, и пусть $\iota : X_0 \to X$ — тождественное вложение. С учетом 7.5.10 будет $l_0 \in |\partial|\ (p \circ \iota) = |\partial|\ (p) \circ \iota = \|l_0\|\ |\partial|(\|\cdot\|) \circ \iota$. Осталось заметить, что $|\partial|\ (\|\cdot\|_X) = B_{X'}$. $\rhd$

7.5.12. Теорема отделимости в топологическом варианте. *Пусть U — выпуклое множество с непустой внутренностью в пространстве X. Если L — аффинное многообразие в X и $L \cap \operatorname{int} U = \varnothing$, то существует замкнутая гиперплоскость H в X, для которой $H \supset L$ и $H \cap \operatorname{int} U = \varnothing$.* $\lhd\rhd$

7.5.13. Замечание. При применении 7.5.12 полезно иметь в виду, что замкнутые гиперплоскости суть в точности множества уровня ненулевых непрерывных линейных функционалов. $\lhd\rhd$

7.5.14. ***Следствие.*** *Пусть* X_0 *— подпространство в* X. *Тогда*

$$\mathrm{cl}\, X_0 = \cap \{\ker f: \ f \in X',\ \ker f \supset X_0\}.$$

$\lhd$ Ясно, что $(f \in X',\ \ker f \supset X_0) \Rightarrow \ker f \supset \mathrm{cl}\, X_0$. Если же $x_0 \notin \mathrm{cl}\, X_0$, то найдется открытая выпуклая окрестность x_0, не содержащая точек $\mathrm{cl}\, X_0$. На основании 7.5.12 и 7.5.13 имеется функционал $f_0 \in (X_{\mathbb{R}})'$ такой, что $\ker f_0 \supset \mathrm{cl}\, X_0$ и $f_0(x_0) = 1$. Из свойств комплексификатора выводим, что функционал $\mathbf{Re}^{-1} f_0$ обращается в нуль на X_0 и не равен нулю в точке x_0. Несомненно также, что этот функционал непрерывен. $\rhd$

7.6. Принципы штрихования

7.6.1. *Пусть* X, Y *— (мульти)нормированные векторные пространства (над одним и тем же основным полем* $\mathbb{F}$*) и* X', Y' *— сопряженные пространства. Пусть, далее,* T *— непрерывный линейный оператор из* X *в* Y. *Для* $y' \in Y'$ *выполнено* $y' \circ T \in X'$ *и отображение* $y' \mapsto y' \circ T$ *— линейный оператор.* $\lhd\rhd$

7.6.2. Определение. Оператор $T' : Y' \to X'$, построенный в 7.6.1, называют *сопряженным* к оператору $T : X \to Y$.

7.6.3. ***Теорема.*** *Отображение штрихования* $T \mapsto T'$ *осуществляет линейную изометрию пространства* $B(X,\ Y)$ *в пространство* $B(Y',\ X')$.

$\lhd$ То, что отображение штрихования — линейный оператор из $B(X,\ Y)$ в $\mathscr{L}(Y',\ X')$, очевидно. Помимо этого, раз $\|y\| = \sup\{|l(y)| : l \in |\partial|(\|\cdot\|)\}$, то

$$\|T'\| = \sup\{\|T'y'\| : \ \|y'\| \le 1\} =$$

$$= \sup\{|y'(Tx)| : \ \|y'\| \le 1,\ \|x\| \le 1\} =$$

$$= \sup\{\|Tx\| : \ \|x\| \le 1\} = \|T\|,$$

что и нужно. $\rhd$