7.5.13. Замечание. При применении 7.5.12 полезно иметь в виду, что замкнутые гиперплоскости суть в точности множества уровня ненулевых непрерывных линейных функционалов. $\lhd\rhd$

7.5.14. *Следствие.* *Пусть* X_0 — *подпространство в* X. *Тогда*

$$\operatorname{cl} X_0 = \cap \{\ker f : \ f \in X', \ \ker f \supset X_0\}.$$

$\lhd$ Ясно, что $(f \in X', \ \ker f \supset X_0) \Rightarrow \ker f \supset \operatorname{cl} X_0$. Если же $x_0 \notin \operatorname{cl} X_0$, то найдется открытая выпуклая окрестность x_0, не содержащая точек $\operatorname{cl} X_0$. На основании 7.5.12 и 7.5.13 имеется функционал $f_0 \in (X_{\mathbb{R}})'$ такой, что $\ker f_0 \supset \operatorname{cl} X_0$ и $f_0(x_0) = 1$. Из свойств комплексификатора выводим, что функционал $\mathbf{Re}^{-1} f_0$ обращается в нуль на X_0 и не равен нулю в точке x_0. Несомненно также, что этот функционал непрерывен. $\rhd$

7.6. Принципы штрихования

7.6.1. *Пусть* X, Y — *(мульти)нормированные векторные пространства (над одним и тем же основным полем* $\mathbb{F}$*) и* X', Y' — *сопряженные пространства. Пусть, далее,* T — *непрерывный линейный оператор из* X *в* Y. *Для* $y' \in Y'$ *выполнено* $y' \circ T \in X'$ *и отображение* $y' \mapsto y' \circ T$ — *линейный оператор.* $\lhd\rhd$

7.6.2. Определение. Оператор $T' : Y' \to X'$, построенный в 7.6.1, называют *сопряженным* к оператору $T : X \to Y$.

7.6.3. *Теорема.* *Отображение штрихования* $T \mapsto T'$ *осуществляет линейную изометрию пространства* $B(X, \ Y)$ *в пространство* $B(Y', \ X')$.

$\lhd$ То, что отображение штрихования — линейный оператор из $B(X, \ Y)$ в $\mathscr{L}(Y', \ X')$, очевидно. Помимо этого, раз $\|y\| = \sup\{|l(y)| : l \in |\partial|(\|\cdot\|)\}$, то

$$\|T'\| = \sup\{\|T'y'\| : \ \|y'\| \le 1\} =$$

$$= \sup\{|y'(Tx)| : \ \|y'\| \le 1, \ \|x\| \le 1\} =$$

$$= \sup\{\|Tx\| : \ \|x\| \le 1\} = \|T\|,$$

что и нужно. $\rhd$

7.6.4. Примеры.

(1) Пусть X, Y — гильбертовы пространства, и задан $T \in B(X,\ Y)$. Отметим прежде всего, что в очевидном смысле $T \in B(X,\ Y) \Leftrightarrow T \in B(X_*,\ Y_*)$. Обозначим теперь через $(\cdot)'_X : X_* \to X'$ штрихование в X, т. е. $x \mapsto x' := (\,\cdot\,, x)$ и $(\cdot)'_Y : Y_* \to Y'$ — штрихование в Y, т. е. $y \mapsto y' := (\,\cdot\,, y)$.

Связь эрмитово сопряженного оператора $T^* \in B(Y,\ X)$ и сопряженного $T' \in B(Y',\ X')$ задается коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} X_* & \xleftarrow{T^*} & Y_* \\ (\cdot)'_X \downarrow & & \downarrow (\cdot)'_Y \\ X' & \xleftarrow{T'} & Y' \end{array}$$

$\lhd$ В самом деле, надо убедиться, что для $y \in Y$ выполнено $T'y' = (T^*y)'$. Для $x \in X$ по определению имеем

$$T'y'(x) = y'(Tx) = (Tx,\ y) = (x,\ T^*y) = (T^*y)'(x).$$

В силу произвольности x получаем требуемое. $\rhd$

(2) *Пусть $\iota : X_0 \to X$ — вложение X_0 в X. Тогда $\iota' : X \to X'_0$, причем $\iota'(x')(x_0) = x'(x_0)$ для всех $x_0 \in X_0$ и $x' \in X'$ и ι' — эпиморфизм, т. е. $X' \xrightarrow{\iota'} X'_0 \to 0$ — точная последовательность.* $\lhd\rhd$

7.6.5. Определение. Пусть дана некоторая элементарная диаграмма $X \xrightarrow{T} Y$. Диаграмму $Y' \xrightarrow{T'} X'$ называют *полученной штрихованием* исходной диаграммы или *сопряженной* диаграммой. Если в произвольной диаграмме, составленной из ограниченных линейных отображений банаховых пространств, произведено штрихование всех элементарных поддиаграмм, то возникшую диаграмму называют *сопряженной* к исходной или полученной из исходной с помощью штрихования.

7.6.6. Лемма о двойном штриховании. *Пусть $X'' \xrightarrow{T''} Y''$ — диаграмма, полученная двойным штрихованием диаграммы $X \xrightarrow{T} Y$. Тогда коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ '' \downarrow & & \downarrow '' \\ X'' & \xrightarrow{T''} & Y'' \end{array}$$

где $'' : X \to X''$ *и* $'' : Y \to Y''$ *— соответствующие двойные штрихования — канонические вложения* X *в* X'' *и* Y *в* Y'' (*см.* 5.1.10 (8)).

$\lhd$ Пусть $x \in X$. Нужно показать, что $T''x'' = (Tx)''$. Возьмем $y' \in Y'$. Тогда

$$T''x''(y') = x''(T'y') = T'y'(x) = y'(Tx) = (Tx)''(y').$$

В силу произвольности $y' \in Y'$ имеем требуемое. $\rhd$

7.6.7. *Принцип штрихования диаграмм.* *Диаграмма коммутативна в том и только в том случае, если коммутативна сопряженная диаграмма.*

$\lhd$ Достаточно убедиться, что треугольники

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "R"'] & & Y \arrow[dl, "S"] \\ & Z & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] X' \arrow[rr, "T'"] & & Y' \\ & Z' \arrow[ul, "R'"] \arrow[ur, "S'"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативны или нет одновременно. Так как $R = ST \Rightarrow R' = (ST)' = T'S'$, то коммутативность левого треугольника влечет коммутативность правого. Если же правый треугольник коммутативен, то по уже доказанному $R'' = S''T''$. Привлекая 7.6.6, имеем $(Rx)'' = R''x'' = S''T''x'' = S''(T''x'') = S''(Tx)'' = (STx)''$ для всех $x \in X$. Значит, $R = ST$. $\rhd$

7.6.8. Определение. Пусть X_0 — подпространство в X, а $\mathscr{X}_0$ — подпространство в X'. Положим

$$X_0^{\perp} := \{f \in X' : \ \ker f \supset X_0\} \ = |\partial|(\delta(X_0));$$

$$^{\perp}\mathscr{X}_0 := \{x \in X : \ f \in \mathscr{X}_0 \Rightarrow f(x) = 0\} = \cap\{\ker f : \ f \in \mathscr{X}_0\}.$$

Подпространство $X_0^{\perp}$ называют (***прямой***) ***полярой*** X_0, а подпространство $^{\perp}\mathscr{X}_0$ — (***обратной***) ***полярой*** $\mathscr{X}_0$. Используют также менее точный термин «аннулятор».

7.6.9. Определение. Пусть X, Y — банаховы пространства. Оператор $T \in B(X, Y)$ называют ***нормально разрешимым***, если $\operatorname{im} T$ — замкнутое подпространство.

7.6.10. *Оператор $T \in B(X,\ Y)$ нормально разрешим в том и только в том случае, если T, рассматриваемый как оператор из X в $\operatorname{im} T$, является гомоморфизмом.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Теорема Банаха о гомоморфизме.

$\Leftarrow$: Следует сослаться на 7.4.2. $\triangleright$

7.6.11. *Лемма о полярах.* *Пусть $T \in B(X,\ Y)$. Тогда*

(1) $(\operatorname{im} T)^\perp = \ker(T')$;

(2) *если T нормально разрешим, то*

$$\operatorname{im} T = {}^\perp\ker(T'), \quad (\ker T)^\perp = \operatorname{im}(T').$$

$\triangleleft$ (1) $y' \in \ker(T') \Leftrightarrow T'y' = 0 \Leftrightarrow (\forall\, x \in X)\ T'y'(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall\, x \in X)\ y'(Tx) = 0 \Leftrightarrow y' \in (\operatorname{im} T)^\perp$.

(2) Равенство $\operatorname{cl} \operatorname{im} T = {}^\perp\ker(T')$ составляет содержание 7.5.13. Помимо этого, по условию $\operatorname{im} T$ замкнуто.

Если $x' = T'y'$ и $Tx = 0$, то $x'(x) = T'y'(x) = y'(Tx) = 0$, т. е. $x' \in (\ker T)^\perp$. Значит, $\operatorname{im}(T') \subset (\ker T)^\perp$. Пусть теперь $x' \in (\ker T)^\perp$. Считая, что оператор T действует в $\operatorname{im} T$, по теореме Сарда, примененной к левой части диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "x'"'] & \operatorname{im} T \arrow[r] \arrow[d, "y'_0"] & Y \arrow[dl, "y'"] \\ & \mathbb{F} & \end{tikzcd}$$

найдем $y'_0 \in (\operatorname{im} T)'$, для которого $y'_0 \circ T = x'$. По принципу непрерывного продолжения существует $y' \in Y'$ такой, что $y' \supset y'_0$. Стало быть, $x' = T'y'$, т. е. $x' \in \operatorname{im}(T')$. $\triangleright$

7.6.12. *Теорема Хаусдорфа.* *Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда оператор $T \in B(X,\ Y)$ нормально разрешим в том и только в том случае, если нормально разрешим оператор $T' \in B(Y',\ X')$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: В силу 7.6.11 (2), $\operatorname{im}(T') = (\ker T)^\perp$. Подпространство $(\ker T)^\perp$, очевидно, является замкнутым.

$\Leftarrow$: Пусть сначала $\operatorname{cl} \operatorname{im} T = Y$. Ясно, что $0 = Y^\perp = (\operatorname{cl} \operatorname{im}\ T)^\perp = (\operatorname{im} T)^\perp = \ker(T')$ в силу 7.6.11. По теореме Банаха об изоморфизме можно подыскать $S \in B(\operatorname{im}(T'),\ Y')$, для которого $ST' = I_{Y'}$. Случай $r := \|S\| = 0$ тривиален. Поэтому можно считать, что $\|T'y'\| \geq 1/r\, q\|y'\|$ при всех $y' \in Y'$.

Убедимся в том, что $\operatorname{cl} T(B_X) \supset 1/2r\, B_Y$. Если это проделано, то ввиду идеальной выпуклости $T(B_X)$ выполнено включение $T(B_X) \supset 1/4r\, B_Y$. Следовательно, T — гомоморфизм.

Пусть $y \notin \operatorname{cl} T(B_X)$. Можно утверждать, что y не лежит и в некотором открытом выпуклом множестве, содержащем $T(B_X)$. Переходя, если нужно, к вещественным основам пространств X и Y, будем считать, что $\mathbb{F} := \mathbb{R}$. Применим теорему отделимости 7.5.12 и найдем ненулевой $y' \in Y'$ такой, что

$$\|y'\|\ \|y\| \geq y'(y) \geq \sup_{\|x\| \leq 1} y'(Tx) = \|T'y'\| \geq \frac{1}{r}\|y'\|.$$

Отсюда $\|y\| \geq 1/r > 1/2r$. Таким образом, требуемое включение установлено и оператор T в наших предположениях нормально разрешим.

Рассмотрим теперь общий случай. Положим $Y_0 := \operatorname{cl} \operatorname{im} T$, и пусть $\iota : Y_0 \to Y$ — тождественное вложение. Тогда $T = \iota\overline{T}$, где $\overline{T} : X \to Y_0$ — оператор, действующий по правилу $\overline{T}x = Tx$ для $x \in X$. Кроме того, $\operatorname{im}(T') = \operatorname{im}(\overline{T}'\iota') = \overline{T}'(\operatorname{im}(\iota')) = \overline{T}'(Y_0')$, ибо $\iota'(Y') = Y_0'$ (см. 7.6.4 (2)). Итак, $\overline{T}'$ — нормально разрешимый оператор. Стало быть, по уже доказанному $\overline{T}$ нормально разрешим. Осталось заметить, что $\operatorname{im} T = \operatorname{im} \overline{T}$. $\triangleright$

7.6.13. *Принцип штрихования последовательностей.* *Последовательность*

$$\ldots \longrightarrow X_{k-1} \xrightarrow{T_k} X_k \xrightarrow{T_{k+1}} X_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

точна в том и только в том случае, если точна сопряженная последовательность

$$\ldots \longleftarrow X'_{k-1} \xleftarrow{T'_k} X'_k \xleftarrow{T'_{k+1}} X'_{k+1} \longleftarrow \ldots .$$

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Так как $\operatorname{im} T_{k+1} = \ker T_{k+2}$, то T_{k+1} нормально разрешим. Привлекая лемму о полярах, имеем

$$\ker(T'_k) = (\operatorname{im} T_k)^\perp = (\ker T_{k+1})^\perp = \operatorname{im}(T'_{k+1}).$$

$\Leftarrow$: По теореме Хаусдорфа T_{k+1} нормально разрешим. Вновь апеллируя к 7.6.11 (2), выводим

$$(\operatorname{im} T_k)^\perp = \ker(T_k') = \operatorname{im}(T_{k+1}') = (\ker T_{k+1})^\perp.$$

Поскольку T_k нормально разрешим по теореме 7.6.12, то $\operatorname{im} T_k$ — замкнутое подпространство. Привлекая 7.5.14, получаем

$$\operatorname{im} T^k = {}^\perp((\operatorname{im} T_k)^\perp) = {}^\perp((\ker T_{k+1})^\perp) = \ker T_{k+1}.$$

Здесь учтено, что $\ker T_{k+1}$ — это тоже замкнутое подпространство. $\triangleright$

7.6.14. *Следствие.* *Для каждого нормально разрешимого оператора T имеют место следующие изоморфизмы* $(\ker T)' \simeq \operatorname{coker}(T')$ *и* $(\operatorname{coker} T)' \simeq \ker(T')$.

$\triangleleft$ В силу 2.3.5 (6) последовательность

$$0 \to \ker T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{coker} T \to 0$$

точна. Из 7.6.13 выводим, что последовательность

$$0 \to (\operatorname{coker} T)' \to Y' \xrightarrow{T'} X' \to (\ker T)' \to 0$$

точна. $\triangleright$

7.6.15. *Следствие.* *T — изоморфизм $\Leftrightarrow$ T' — изоморфизм.* $\triangleleft\triangleright$

7.6.16. *Следствие.* $\operatorname{Sp}(T) = \operatorname{Sp}(T')$. $\triangleleft\triangleright$

Упражнения

7.1. Выяснить, какие линейные операторы идеальны.

7.2. Установить, что раздельно непрерывная билинейная форма на банаховом пространстве непрерывна по совокупности переменных.

7.3. Будет ли равномерно ограниченным на шаре семейство полунепрерывных снизу сублинейных функционалов на банаховом пространстве?

7.4. Пусть X, Y — банаховы пространства и $T : X \to Y$. Доказать, что для некоторого $t \in \mathbb{R}$ будет $\|Tx\|_Y \geq t\|x\|_X$ в том и только в том случае, если $\ker T = 0$ и $\operatorname{im} T$ — полное множество.

7.5. Выяснить условия нормальной разрешимости оператора умножения на функцию в пространстве непрерывных на компакте функций.