Глава 8

Операторы в банаховых пространствах

8.1. Голоморфные функции и контурные интегралы

8.1.1. Определение. Пусть X — банахово пространство. Подмножество Λ шара $B_{X'}$ в сопряженном пространстве X' называют ***нормирующим*** (для X), если для каждого элемента x из X выполнено $\|x\| = \sup\{|l(x)| : \ l \in \Lambda\}$. Если, помимо этого, для всякого U в X такого, что $\sup\{|l(u)| : \ u \in U\} < +\infty$ при $l \in \Lambda$, справедливо $\sup \|U\| < +\infty$, то Λ называют ***вполне нормирующим*** множеством.

8.1.2. Примеры.

(1) Шар $B_{X'}$ — вполне нормирующее множество в силу 5.1.10 (8) и 7.2.7.

(2) Если Λ_0 — (вполне) нормирующее множество и $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset B_{X'}$, то Λ_1 также (вполне) нормирующее множество.

(3) Множество крайних точек $\operatorname{ext}(B_{X'})$ является нормирующим по теореме Крейна — Мильмана для субдифференциалов 3.6.5 и несомненного равенства $B_{X'} = |\partial|(\|\cdot\|_X)$, которое уже неоднократно было использовано. Однако вполне нормирующим это множество быть не обязано (так, в частности, обстоит дело в пространстве $C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$). $\triangleleft\triangleright$

(4) Пусть X, Y — банаховы пространства (над одним и тем же полем $\mathbb{F}$) и Λ_Y — нормирующее множество для Y. Положим

$$\Lambda_B := \{\delta_{(y',x)} : \ y' \in \Lambda_Y, \ x \in B_X\},$$

где $\delta_{(y',x)}(T) := y'(Tx)$ для $y' \in Y$, $x \in X$ и $T \in B(X,\ Y)$. Ясно, что

$$|\delta_{(y',x)}(T)| = |y'(Tx)| \leq \|y'\|\ \|Tx\| \leq \|y'\|\ \|T\|\ \|x\|,$$

т. е. $\delta_{(y',x)} \in B(X,\ Y)'$. Помимо этого, для $T \in B(X,\ Y)$ выполнено

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| :\ \|x\| \leq 1\} = \sup\{|y'(Tx)| :\ y' \in \Lambda_Y,\ \|x\| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{|\delta_{(y',x)}(T)| :\ \delta_{(y',x)} \in \Lambda_B\}.$$

Таким образом, Λ_B — нормирующее множество (для $B(X,\ Y)$). Если при этом Λ_Y — вполне нормирующее множество, то Λ_B также вполне нормирующее множество. В самом деле, если U таково, что числовое множество $\{|y'(Tx)| :\ T \in U\}$ ограничено при любых $x \in B_X$ и $y' \in \Lambda_Y$, то по условию множество $\{Tx :\ T \in U\}$ ограничено в Y для всякого $x \in X$. В силу принципа равномерной ограниченности 7.2.5 это означает, что $\sup \|U\| < +\infty$.

8.1.3. *Теорема Данфорда — Хилле.* *Пусть X — комплексное банахово пространство и Λ — вполне нормирующее множество для X. Пусть, далее, $f : \mathscr{D} \to X$ — отображение подмножества $\mathscr{D}$ в $\mathbb{C}$ в пространство X, причем $\mathscr{D}$ открыто (в $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$). Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для каждого $z_0 \in \mathscr{D}$ существует предел*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0};$$

(2) *для каждых $z_0 \in \mathscr{D}$ и $l \in \Lambda$ существует предел*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{l \circ f(z) - l \circ f(z_0)}{z - z_0},$$

т. е. функция $l \circ f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ голоморфна при $l \in \Lambda$.

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1): Простоты ради будем считать, что $z_0 = 0$ и $f(z_0) = 0$. Рассмотрим шар радиуса 2ε, целиком лежащий в $\mathscr{D}$, т. е. $2\varepsilon\mathbb{D} \subset \mathscr{D}$, где $\mathbb{D} := B_{\mathbb{C}}$. Как принято в комплексном анализе, будем считать круг $\varepsilon\mathbb{D}$ (ориентированным) компактным многообразием с краем $\varepsilon\mathbb{T}$,

где $\mathbb{T}$ — (должным образом ориентированная) единичная окружность $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. При $z_1, \ z_2 \in \varepsilon\mathbb{D} \setminus 0$ для голоморфной функции $l \circ f$ (функционал l лежит в Λ) имеют место представления интегралом Коши:

$$\frac{l \circ f(z_k)}{z_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2\varepsilon\mathbb{T}} \frac{l \circ f(z)}{z(z - z_k)} dz \quad (k := 1, \ 2).$$

Значит, при $z_1 \neq z_2$, учитывая, что для $z \in 2\varepsilon\mathbb{T}$ выполнено $|z - z_k| \geq \varepsilon$ $(k := 1, \ 2)$, а также что функция $l \circ f$ непрерывна в $\mathscr{D}$, получаем

$$\left| l \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{f(z_1)}{z_1} - \frac{f(z_2)}{z_2} \right) \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{z_1 - z_2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2\varepsilon\mathbb{T}} l \circ f(z) \left(\frac{1}{z(z - z_1)} - \frac{1}{z(z - z_2)} \right) dz \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{2\varepsilon\mathbb{T}} l \circ f(z) \frac{1}{z(z - z_1)(z - z_2)} dz \right| \leq$$

$$\leq M \sup_{z \in 2\varepsilon\mathbb{T}} |l \circ f(z)| < +\infty$$

для подходящего $M > 0$. Поскольку Λ — вполне нормирующее множество, заключаем:

$$\sup_{\substack{z_1 \neq z_2; z_1, z_2 \neq 0 \\ |z_1| \leq \varepsilon, |z_2| \leq \varepsilon}} \frac{1}{|z_1 - z_2|} \left\| \frac{f(z_1)}{z_1} - \frac{f(z_2)}{z_2} \right\| < +\infty.$$

Последнее неравенство обеспечивает существование нужного предела. $\triangleright$

8.1.4. Определение. Отображение $f : \mathscr{D} \to X$, удовлетворяющее 8.1.3 (1) (или, что то же самое, 8.1.3 (2) для какого-либо вполне нормирующего множества Λ), называют *голоморфным*.

8.1.5. Замечание. Иногда используют излишне детальную терминологию. Именно, если f удовлетворяет 8.1.3 (1), то f называют *сильно голоморфной* функцией. В случае, если для f выполнено 8.1.3 (2) при $\Lambda := B_{X'}$, говорят о *слабой голоморфности* f. В условиях 8.1.3 (2) и 8.1.2 (4), т. е. при $f : \mathscr{D} \to B(X,\ Y)$, $\Lambda_Y := B_{Y'}$ и соответствующем $\Lambda := \Lambda_B$, говорят о *слабо операторно голоморфных* функциях. Учитывая приведенную терминологию, теорему Данфорда — Хилле часто называют *теоремой о голоморфности* и выражают словами: «слабо голоморфная функция сильно голоморфна».

8.1.6. Замечание. В дальнейшем удобно использовать интегралы простейших гладких X-значных форм $f(z)dz$ по простейшим ориентированным многообразиям — по краям элементарных компактов в плоскости (см. 4.8.5), составленным из конечного числа непересекающихся простых петель. В такие интегралы вкладывают очевидный смысл. Именно, для петли γ выбирают подходящую (гладкую) параметризацию $\Psi : \mathbb{T} \to \gamma$ (с учетом ориентации) и полагают

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz := \int\limits_{\mathbb{T}} f \circ \Psi d\Psi,$$

где последний интеграл понимают, например, как подходящий интеграл Бохнера (см. 5.5.9 (6)). Несомненна корректность этого определения, т. е. существование нужного интеграла Бохнера и его независимость от выбора параметризации Ψ.

8.1.7. *Теорема Коши — Винера.* *Пусть $\mathscr{D}$ — непустое открытое подмножество плоскости и $f : \mathscr{D} \to X$ — голоморфное отображение в банахово пространство X. Пусть, далее, F — простая картина для пары $(\varnothing,\ \mathscr{D})$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial F} f(z)dz = 0.$$

При этом для $z_0 \in \operatorname{int} F$ выполнено

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

◁ В силу 8.1.3 необходимые интегралы Бохнера существуют. Требуемые равенства, очевидно, следуют из справедливости их скалярных версий, составляющих содержание классической теоремы Коши, сказанного в 8.1.2 (1) и отмеченной в 5.5.9 (6) перестановочности интегралов Бохнера с ограниченными функционалами. ▷

8.1.8. Замечание. Теорема Коши — Винера позволяет по хорошо известным образцам выводить для X-значных голоморфных функций аналоги теорем классического комплексного анализа.

8.1.9. ***Теорема о разложении Тейлора.*** *Пусть $f : \mathscr{D} \to X$ — голоморфная функция и $z_0 \in \mathscr{D}$. В любом круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ таком, что $\operatorname{cl} U$ лежит в $\mathscr{D}$, имеет место разложение Тейлора (в равномерно сходящийся степенной ряд)*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n вычисляют по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0).$$

◁ Доказательство основано на стандартном разложении ядра $u \mapsto (u - z)^{-1}$ в формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U'} \frac{f(u)}{u - z} du \quad (z \in \operatorname{cl} U)$$

по степеням $z - z_0$, т. е.

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{(u - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}\right)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}.$$

Последний ряд сходится равномерно по $u \in \partial U'$. (Здесь $U' = U + q\mathbb{D}$ для какого-либо $q > 0$, такого что $\operatorname{cl} U' \subset \mathscr{D}$.) Учитывая, что

$\sup \|f(\partial U')\| < +\infty$, и производя интегрирование, приходим к требуемому представлению $f(z)$ при $z \in \operatorname{cl} U$. Применяя доказанное к U' и привлекая 8.1.7, видим, что исследуемый степенной ряд сходится в каждой точке U'. Отсюда вытекает его равномерная сходимость на компактных подмножествах U', а потому и на U. $\triangleright$

8.1.10. *Теорема Лиувилля.* *Если функция $f : \mathbb{C} \to X$ голоморфна и $\sup \|f(\mathbb{C})\| < +\infty$, то f — постоянное отображение.*

$\triangleleft$ Для $\varepsilon > 0$, рассматривая диск $\varepsilon\mathbb{D}$ и учитывая 8.1.9, имеем

$$\|c_n\| \leq \sup_{z \in \varepsilon\mathbb{T}} \|f(z)\| \cdot \varepsilon^{-n} \leq \sup \|f(\mathbb{C})\| \cdot \varepsilon^{-n}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Таким образом, $c_n = 0$ для $n \in \mathbb{N}$. $\triangleright$

8.1.11. *Каждый ограниченный эндоморфизм ненулевого комплексного банахова пространства имеет непустой спектр.*

$\triangleleft$ Пусть T — такой эндоморфизм. Если $\operatorname{Sp}(T) = \varnothing$, то резольвента $R(T, \cdot)$ голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$, например, по 5.6.21. Кроме того, на основании 5.6.15, $\|R(T, \lambda)\| \to 0$ при $|\lambda| \to +\infty$. В силу 8.1.10 заключаем, что $R(T, \cdot) = 0$. В то же время, привлекая 5.6.15, видим, что при $|\lambda| > \|T\|$ выполнено $R(T, \lambda)(\lambda - T) = 1$. Получается противоречие. $\triangleright$

8.1.12. *Имеет место формула Бёрлинга — Гельфанда:*

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{Sp}(T)\}$$

для любого оператора $T \in B(X)$, где X — комплексное банахово пространство, т. е. спектральный радиус оператора совпадает с радиусом его спектра.

$\triangleleft$ То, что спектральный радиус $r(T)$ больше радиуса спектра, отмечено в 5.6.16. Таким образом, при $r(T) = 0$ доказывать ничего не надо. Пусть теперь $r(T) > 0$. Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$ так, что $|\lambda| > \sup\{|\mu| : \mu \in \operatorname{Sp}(T)\}$. Тогда круг радиуса $|\lambda|^{-1}$ целиком лежит в области голоморфности функции (см. 5.6.15)

$$f(z) := \begin{cases} R\,(T,\ z^{-1}),\ z \neq 0,\ z^{-1} \in \operatorname{res}(T), \\ 0,\ z = 0. \end{cases}$$

Привлекая 8.1.9 и 5.6.17, заключаем, что $|\lambda|^{-1} < r(T)^{-1}$. Следовательно, $|\lambda| > r(T)$. $\triangleright$

8.1.13. *Пусть K — непустой компакт в $\mathbb{C}$ и $H(K)$ — множество голоморфных в окрестности K функций, т. е. ($f \in H(K) \Leftrightarrow f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, $\operatorname{dom} f \supset K$). Для $f_1,\ f_2 \in H(K)$ положим $f_1 \sim f_2$, если существует открытое подмножество $\mathscr{D}$ в $\operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ такое, что $K \subset \mathscr{D}$ и $f_1|_{\mathscr{D}} = f_2|_{\mathscr{D}}$. Тогда $\sim$ является отношением эквивалентности в $H(K)$.* $\triangleleft\triangleright$

8.1.14. Определение. В условиях 8.1.13 положим $\mathscr{H}(K) := H(K)/\sim$. Элемент $\overline{f} \in \mathscr{H}(K)$, содержащий функцию $f \in H(K)$, называют *ростком* f на компакте K.

8.1.15. *Пусть $\overline{f},\ \overline{g} \in \mathscr{H}(K)$. Пусть, кроме того, выделены $f_1,\ f_2 \in \overline{f},\ g_1,\ g_2 \in \overline{g}$. Положим*

$$x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} g_1 \Rightarrow \varphi_1(x) := f_1(x) + g_1(x),$$

$$x \in \operatorname{dom} f_2 \cap \operatorname{dom} g_2 \Rightarrow \varphi_2(x) := f_2(x) + g_2(x).$$

Тогда $\varphi_1,\ \varphi_2 \in H(K)$, причем $\overline{\varphi_1} = \overline{\varphi_2}$.

$\triangleleft$ Выбрав открытые множества $K \subset \mathscr{D}_1 \subset \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ и $K \subset \mathscr{D}_2 \subset \operatorname{dom} g_1 \cap \operatorname{dom} g_2$, в которых совпадают f_1 и f_2 и соответственно g_1 и g_2, видим, что в $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ совпадают φ_1 и φ_2. $\triangleright$

8.1.16. Определение. Класс, введенный в 8.1.15, называют *суммой ростков* $\overline{f_1}$ и $\overline{f_2}$ и обозначают $\overline{f_1} + \overline{f_2}$. Аналогично вводят *произведение ростков* и *умножение ростка на комплексное число.*

8.1.17. *$\mathscr{H}(K)$ с операциями, введенными в 8.1.16, является алгеброй.* $\triangleleft\triangleright$

8.1.18. Определение. Возникающую алгебру $\mathscr{H}(K)$ называют *алгеброй ростков голоморфных функций* на компакте K.

8.1.19. *Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$, а $R : \mathbb{C}\backslash K \to X$ — голоморфная функция со значениями в банаховом пространстве X. Пусть, далее, $\overline{f} \in \mathscr{H}(K)$ и $f_1,\ f_2 \in \overline{f}$. Если F_1 — простая картина для пары $(K,\ \operatorname{dom} f_1)$, а F_2 — простая картина для пары $(K,\ \operatorname{dom} f_2)$, то*

$$\int\limits_{\partial F_1} f_1(z)R(z)dz = \int\limits_{\partial F_2} f_2(z)R(z)dz.$$

$\lhd$ Пусть $K \subset \mathscr{D} \subset \operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2$, где $\mathscr{D}$ открыто и $f_1|_{\mathscr{D}} = f_2|_{\mathscr{D}}$. Возьмем простую картину $K \subset F \subset \mathscr{D}$. Учитывая голоморфность функции $f_1 R$ на $\operatorname{dom} f_1 \setminus K$ и голоморфность $f_2 R$ на $\operatorname{dom} f_2 \setminus K$, выводим равенства

$$\int\limits_{\partial F} f_1(z)R(z)dz = \int\limits_{\partial F_1} f_1(z)R(z)dz,$$

$$\int\limits_{\partial F} f_2(z)R(z)dz = \int\limits_{\partial F_2} f_2(z)R(z)dz$$

(из нетривиального факта справедливости их скалярных аналогов). Ввиду совпадения f_1 и f_2 на $\mathscr{D}$ имеем требуемое. $\rhd$

8.1.20. Определение. Фиксируя $h \in \mathscr{H}(K)$, в условиях 8.1.19 *контурным интегралом* h с ядром R называют элемент

$$\oint h(z)R(z)dz := \int\limits_{\partial F} f(z)R(z)dz,$$

где $h = \overline{f}$ и F — простая картина для пары $(K,\ \operatorname{dom} f)$.

8.1.21. Замечание. Обозначение $h(z)$ в 8.1.20 неслучайно. Оно объясняется тем, что для каждой точки $z \in K$ и любых двух представителей $f_1,\ f_2$ ростка h выполнено $w := f_1(z) = f_2(z)$. В этой связи об элементе w говорят как о *значении ростка h в точке z* и пишут $h(z) = w$. Отметим здесь же, что в 8.1.20 функцию R можно считать заданной лишь в $U \setminus K$, где $\operatorname{int} U \supset K$.

8.2. Голоморфное функциональное исчисление

8.2.1. Определение. Пусть X — (ненулевое) комплексное банахово пространство и T — ограниченный *эндоморфизм* X, т. е. $T \in B(X)$. Для $h \in \mathscr{H}(\operatorname{Sp}(T))$ контурный интеграл с ядром $R(T,\cdot)$ — резольвентой оператора T — обозначают

$$\mathscr{R}_T h := \frac{1}{2\pi i} \oint h(z)R(T,\ z)dz$$