$\lhd$ Пусть $K \subset \mathscr{D} \subset \operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2$, где $\mathscr{D}$ открыто и $f_1|_{\mathscr{D}} = f_2|_{\mathscr{D}}$. Возьмем простую картину $K \subset F \subset \mathscr{D}$. Учитывая голоморфность функции $f_1 R$ на $\operatorname{dom} f_1 \setminus K$ и голоморфность $f_2 R$ на $\operatorname{dom} f_2 \setminus K$, выводим равенства

$$\int\limits_{\partial F} f_1(z)R(z)dz = \int\limits_{\partial F_1} f_1(z)R(z)dz,$$

$$\int\limits_{\partial F} f_2(z)R(z)dz = \int\limits_{\partial F_2} f_2(z)R(z)dz$$

(из нетривиального факта справедливости их скалярных аналогов). Ввиду совпадения f_1 и f_2 на $\mathscr{D}$ имеем требуемое. $\rhd$

8.1.20. Определение. Фиксируя $h \in \mathscr{H}(K)$, в условиях 8.1.19 *контурным интегралом* h с ядром R называют элемент

$$\oint h(z)R(z)dz := \int\limits_{\partial F} f(z)R(z)dz,$$

где $h = \overline{f}$ и F — простая картина для пары $(K,\ \operatorname{dom} f)$.

8.1.21. Замечание. Обозначение $h(z)$ в 8.1.20 неслучайно. Оно объясняется тем, что для каждой точки $z \in K$ и любых двух представителей $f_1,\ f_2$ ростка h выполнено $w := f_1(z) = f_2(z)$. В этой связи об элементе w говорят как о *значении ростка* h *в точке* z и пишут $h(z) = w$. Отметим здесь же, что в 8.1.20 функцию R можно считать заданной лишь в $U \setminus K$, где $\operatorname{int} U \supset K$.

8.2. Голоморфное функциональное исчисление

8.2.1. Определение. Пусть X — (ненулевое) комплексное банахово пространство и T — ограниченный *эндоморфизм* X, т. е. $T \in B(X)$. Для $h \in \mathscr{H}(\operatorname{Sp}(T))$ контурный интеграл с ядром $R(T,\ \cdot)$ — резольвентой оператора T — обозначают

$$\mathscr{R}_T h := \frac{1}{2\pi i} \oint h(z)R(T,\ z)dz$$

и называют *интегралом Рисса — Данфорда* (ростка h). Если f — функция, голоморфная в окрестности $\mathrm{Sp}(T)$, то полагают $f(T) := \mathscr{R}_T f := \mathscr{R}_T \overline{f}$. Используют также более образные обозначения типа

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-T} dz.$$

8.2.2. Замечание. В алгебре, в частности, изучают различные представления математических объектов. Нам удобно пользоваться некоторыми элементарными понятиями теории представлений наиболее «алгебраических» объектов — алгебр. Вспомним простейшие из них.

Пусть A_1, A_2 — две алгебры (над одним и тем же полем). *Морфизмом* A_1 в A_2 или *представлением* алгебры A_1 в алгебре A_2 (реже говорят «в алгебру A_2») называют *мультипликативный линейный оператор* $\mathfrak{R}$, т. е. отображение $\mathfrak{R} \in \mathscr{L}(A_1, A_2)$ такое, что $\mathfrak{R}(ab) = \mathfrak{R}(a)\mathfrak{R}(b)$ для всех a, $b \in A_1$. Представление $\mathfrak{R}$ называют *точным*, если $\ker \mathfrak{R} = 0$. Наличие точного представления $\mathfrak{R} : A_1 \to A_2$ позволяет рассматривать A_1 как подалгебру A_2.

Если A_2 является (под)алгеброй эндоморфизмов $\mathscr{L}(X)$ некоторого векторного пространства X (над тем же полем), то о морфизме A_1 в A_2 говорят как о (линейном) *представлении* A_1 в *пространстве* X или об *операторном представлении* A_1. Пространство X называют в этом случае *пространством представления* алгебры A_1.

Если в пространстве X представления $\mathfrak{R}$ алгебры A есть подпространство X_1, инвариантное относительно всех операторов $\mathfrak{R}(a)$ при $a \in A$, то естественным образом возникает представление $\mathfrak{R}_1 : A \to \mathscr{L}(X_1)$, действующее по правилу $\mathfrak{R}_1(a)x_1 = \mathfrak{R}(a)x_1$ для $x_1 \in X_1$ и $a \in A$, называемое *подпредставлением* $\mathfrak{R}$ (порожденным X_1). Если $X = X_1 \oplus X_2$ и это разложение приводит каждый оператор $\mathfrak{R}(a)$ для $a \in A$, то говорят, что *представление* $\mathfrak{R}$ *приведено к прямой сумме* (*под*)*представлений* $\mathfrak{R}_1$ *и* $\mathfrak{R}_2$ (порожденных X_1 и X_2 соответственно). Отметим важность задачи изучения произвольных *неприводимых представлений* (= представлений, не содержащих нетривиальных подпредставлений).

8.2.3. Теорема Гельфанда — Данфорда. *Интеграл Рисса — Данфорда $\mathscr{R}_T$ служит представлением алгебры ростков голоморфных функций на спектре оператора T в пространстве X — области* *определения оператора T. При этом если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (в окрестности $\mathrm{Sp}(T)$), то $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$ (суммирование ведется относительно операторной нормы в $B(X)$).*

$\triangleleft$ То, что $\mathscr{R}_T$ — линейный оператор, несомненно. Установим мультипликативность $\mathscr{R}_T$. Для этого возьмем $\overline{f_1}$, $\overline{f_2} \in \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T))$ и выберем простые картины F_1, F_2 такие, что $\mathrm{Sp}(T) \subset \mathrm{int}\, F_1 \subset \overline{F_1} \subset \mathrm{int}\, F_2 \subset F_2 \subset \mathscr{D}$, причем функции $f_1 \in \overline{f_1}$, $f_2 \in \overline{f_2}$ являются голоморфными на $\mathscr{D}$.

Привлекая очевидные свойства интеграла Бохнера, классическую теорему Коши и тождество Гильберта 5.6.19, последовательно получаем

$$\mathscr{R}_T\overline{f_1} \circ \mathscr{R}_T\overline{f_2} = f_1(T)f_2(T) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1} \frac{f_1(z_1)}{z_1 - T}dz_1 \circ \int\limits_{\partial F_2} \frac{f_2(z_2)}{z_2 - T}dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_2}\left(\int\limits_{\partial F_1} f_1(z_1)R(T,\ z_1)dz_1\right) f_2(z_2)R(T,\ z_2)dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1}\int\limits_{\partial F_2} f_1(z_1)f_2(z_2)R(T,\ z_1)R(T,\ z_2)dz_2dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1}\int\limits_{\partial F_2} f_1(z_1)f_2(z_2)\frac{R(T,\ z_1) - R(T,\ z_2)}{z_2 - z_1}dz_2dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1} f_1(z_1)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_2}\frac{f_2(z_2)}{z_2 - z_1}dz_2\right)R(T,\ z_1)dz_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_2} f_2(z_2)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial F_1}\frac{f_1(z_1)}{z_2 - z_1}dz_1\right)R(T,\ z_2)dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f_1(z_1)f_2(z_1)R(T,\ z_1)dz_1 - 0 = f_1f_2(T) = \mathscr{R}_T(\overline{f_1}\,\overline{f_2}).$$

Выберем окружность $\gamma := \varepsilon\mathbb{T}$, лежащую как в $\mathrm{res}(T)$, так и внутри круга сходимости ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Учитывая 5.6.16 и 5.5.9 (6), имеем

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}T^n dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\gamma} f(z)z^{-n-1}T^n dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right)T^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$$

в силу 8.1.9. $\triangleright$

8.2.4. Замечание. Теорему 8.2.3 часто называют *основной теоремой голоморфного функционального исчисления.*

8.2.5. Теорема об отображении спектра. *Для любой функции $f \in H(\mathrm{Sp}(T))$, голоморфной в окрестности спектра оператора T из $B(X)$, выполнено*

$$f(\mathrm{Sp}(T)) = \mathrm{Sp}(f(T)).$$

$\triangleleft$ Пусть сначала дано, что $\lambda \in \mathrm{Sp}(f(T))$ и $f^{-1}(\lambda) \cap \mathrm{Sp}(T) = \varnothing$. Для точки $z \in (\mathbb{C}\setminus f^{-1}(\lambda)) \cap \operatorname{dom} f$ положим $g(z) := (\lambda - f(z))^{-1}$. Тогда g — голоморфная функция в окрестности $\mathrm{Sp}(T)$, причем $\overline{g}(\overline{\lambda} - \overline{f}) = (\overline{\lambda} - \overline{f})\overline{g} = \overline{\mathbf{1}_{\mathbb{C}}}$. Привлекая 8.2.3, видим, что $\lambda \in \mathrm{res}(f(T))$. Последнее противоречит условию. Значит, $f^{-1}(\lambda) \cap \mathrm{Sp}(T) \neq \varnothing$, т. е. $\mathrm{Sp}(f(T)) \subset f(\mathrm{Sp}(T))$.

Пусть теперь $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Положим

$$\lambda \neq z \Rightarrow g(z) := \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z}; \quad g(\lambda) := f'(\lambda).$$

Понятно, что g — голоморфная функция (особенность «устранена»). Из 8.2.3 получаем

$$g(T)(\lambda - T) = (\lambda - T)g(T) = f(\lambda) - f(T).$$

Значит, если $f(\lambda) \in \mathrm{res}(f(T))$, то оператор $R(f(T),\ f(\lambda))g(T)$ является обратным к $\lambda - T$. Иными словами, $\lambda \in \mathrm{res}(T)$, что неверно. Итак, $f(\lambda) \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{res}(f(T)) = \mathrm{Sp}(f(T))$, т. е. $f(\mathrm{Sp}(T)) \subset \mathrm{Sp}(f(T))$. $\triangleright$

8.2.6. *Пусть K — непустой компакт; $g : \operatorname{dom} g \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, причем $\operatorname{dom} g \supset K$. Для $f \in H(g(K))$ положим $\overset{\circ}{g}(\overline{f}) := f \circ g$. Тогда $\overset{\circ}{g}$ — представление алгебры $\mathscr{H}(g(K))$ в алгебре $\mathscr{H}(K)$.* $\lhd\rhd$

8.2.7. Теорема Данфорда. *Для всякой функции $g : \operatorname{dom} g \to \mathbb{C}$, голоморфной в окрестности $\operatorname{dom} g$ спектра $\mathrm{Sp}(T)$ оператора $T \in B(X)$, коммутативна следующая диаграмма представлений:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T)) \arrow[dr, "\mathscr{R}_T"'] & \mathscr{H}(\mathrm{Sp}(g(T))) \arrow[l, "\overset{\circ}{g}"'] \arrow[d, "\mathscr{R}_{g(T)}"] \\
 & B(X)
\end{tikzcd}
$$

$\lhd$ Пусть $\overline{f} \in \mathscr{H}(g(\mathrm{Sp}(T)))$ и $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ таковы, что $f \in \overline{f}$ и $\mathscr{D} \supset g(\mathrm{Sp}(T)) = \mathrm{Sp}(g(T))$. Пусть F_1 — простая картина для пары $(\mathrm{Sp}(g(T)),\ \mathscr{D})$ и F_2 — простая картина для пары $(\mathrm{Sp}(T),\ g^{-1}(\operatorname{int} F_1))$. Ясно, что при этом $g(\partial F_2) \subset \operatorname{int} F_1$ и, кроме того, функция $z_2 \mapsto (z_1 - g(z_2))^{-1}$ определена и голоморфна в $\operatorname{int} F_2$ для $z_1 \in \partial F_1$. Таким образом, по 8.2.3

$$
R(g(T),\ z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_2} \frac{R(T,\ z_2)}{z_1 - g(z_2)} dz_2 \quad (z_1 \in \partial F_1).
$$

Учитывая это соотношение, последовательно имеем

$$
\mathscr{R}_{g(T)} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_1} \frac{f(z_1)}{z_1 - g(T)} dz_1 =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_1} f(z_1) \left(\int\limits_{\partial F_2} \frac{R(T,\ z_2)}{z_1 - g(z_2)} dz_2 \right) dz_1 =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_2} \left(\int\limits_{\partial F_1} \frac{f(z_1)}{z_1 - g(z_2)} dz_1 \right) R(T,\ z_2) dz_2 =
$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_2} f(g(z_2))R(T,\ z_2)dz_2 = \mathscr{R}_T \overset{\circ}{g}(\overline{f})$$

(так как $g(z_2) \in \operatorname{int} F_1$ для $z_2 \in \partial F_2$ по построению, то на основании классической теоремы Коши

$$f(g(z_2)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_1} \frac{f(z_1)}{z_1 - g(z_2)} dz_1. \ \triangleright$$

8.2.8. Замечание. Теорему Данфорда весьма часто называют *теоремой о сложной функции* и символически записывают так: $f \circ g(T) = f(g(T))$ для $f \in H(g(\mathrm{Sp}(T)))$.

8.2.9. Определение. Подмножество σ в $\mathrm{Sp}(T)$ называют *спектральным множеством* или *изолированной частью спектра* T, если как σ, так и его дополнение $\sigma' := \mathrm{Sp}\ (T) \setminus \sigma$ являются замкнутыми множествами.

8.2.10. *Пусть σ — спектральное множество и $\varkappa_\sigma$ — это (какая-нибудь) функция, равная единице в некоторой открытой окрестности σ и нулю в некоторой открытой окрестности σ'. Пусть, далее,*

$$P_\sigma := \varkappa_\sigma(T) := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varkappa_\sigma(z)}{z - T} dz.$$

Тогда P_σ — проектор в X и (замкнутое) подпространство $X_\sigma := \operatorname{im} P_\sigma$ инвариантно относительно T.

$\triangleleft$ Поскольку $\varkappa_\sigma^2 = \varkappa_\sigma$, то, по 8.2.3, $\varkappa_\sigma(T)^2 = \varkappa_\sigma(T)$. Помимо этого, $T = \mathscr{R}_T I_{\mathbb{C}}$, где $I_{\mathbb{C}} : z \mapsto z$, откуда $TP_\sigma = P_\sigma T$ (ибо $\overline{I_{\mathbb{C}}}\,\overline{\varkappa_\sigma} = \overline{\varkappa_\sigma}\,\overline{I_{\mathbb{C}}}$). Значит, в силу 2.2.9 (4), X_σ инвариантно относительно T. $\triangleright$

8.2.11. Определение. Оператор P_σ из 8.2.10 называют *проектором Рисса* или же *спектральным проектором*, отвечающим спектральному множеству σ.

8.2.12. Теорема о разбиении спектра. *Пусть σ — спектральное множество оператора T из $B(X)$. Тогда имеет место разложение X в прямую сумму инвариантных подпространств $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$, приводящее T к матричному виду*

$$T \sim \begin{pmatrix} T_\sigma & 0 \\ 0 & T_{\sigma'} \end{pmatrix},$$

где часть T_σ оператора T в X_σ и часть $T_{\sigma'}$ оператора T в $X_{\sigma'}$ таковы, что

$$\mathrm{Sp}(T_\sigma) = \sigma, \quad \mathrm{Sp}(T_{\sigma'}) = \sigma'.$$

$\triangleleft$ Поскольку $\overline{\varkappa_\sigma} + \overline{\varkappa_{\sigma'}} = \overline{\varkappa_{\mathrm{Sp}(T)}} = \overline{\mathbf{1}_\mathbb{C}}$, то ввиду 8.2.3 и 8.2.10 следует установить только утверждение о спектре T_σ.

Из 8.2.5 и 8.2.3 получаем

$$\sigma \cup 0 = \varkappa_\sigma I_\mathbb{C}(\mathrm{Sp}(T)) = \mathrm{Sp}\ (\varkappa_\sigma I_\mathbb{C}(T)) = \mathrm{Sp}\ (\mathscr{R}_T(\varkappa_\sigma I_\mathbb{C})) =$$
$$= \mathrm{Sp}(\mathscr{R}_T \varkappa_\sigma \circ \mathscr{R}_T I_\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(P_\sigma T).$$

При этом в матричном виде

$$P_\sigma T \sim \begin{pmatrix} T_\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть λ — ненулевое комплексное число. Тогда

$$\lambda - P_\sigma T \sim \begin{pmatrix} \lambda - T_\sigma & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

т. е. оператор $\lambda - P_\sigma T$ необратим в том и только в том случае, если необратим оператор $\lambda - T_\sigma$. Итак, $\mathrm{Sp}(T_\sigma) \setminus 0 \subset \mathrm{Sp}(P_\sigma T) \setminus 0 = (\sigma \cup 0) \setminus 0 \subset \sigma$.

Допустим, что $0 \in \mathrm{Sp}(T_\sigma)$ и $0 \notin \sigma$. Выберем открытые непересекающиеся множества $\mathscr{D}_\sigma$ и $\mathscr{D}_{\sigma'}$ так, что $\sigma \subset \mathscr{D}_\sigma$, $0 \notin \mathscr{D}_\sigma$ и $\sigma' \subset \mathscr{D}_{\sigma'}$, и положим

$$z \in \mathscr{D}_\sigma \Rightarrow h(z) := \frac{1}{z};$$
$$z \in \mathscr{D}_{\sigma'} \Rightarrow h(z) := 0.$$

По 8.2.3, $h(T)T = Th(T) = P_\sigma$. Более того, раз $\overline{h}\,\overline{\varkappa_\sigma} = \overline{\varkappa_\sigma}\,\overline{h}$, то разложение $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$ приводит $h(T)$ и для части $h(T)_\sigma$ оператора $h(T)$ в X_σ верно $h(T)_\sigma T_\sigma = T_\sigma h(T)_\sigma = 1$. Таким образом, T_σ обратим, т. е. $0 \notin \mathrm{Sp}(T_\sigma)$. Получили противоречие, означающее, что $0 \in \sigma$. Иными словами, выполнено $\mathrm{Sp}(T_\sigma) \subset \sigma$.

Заметим теперь, что $\mathrm{res}(T) = \mathrm{res}(T_\sigma) \cap \mathrm{res}(T_{\sigma'})$. Значит, по уже доказанному

$$\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{res}(T) = \mathbb{C} \setminus (\mathrm{res}(T_\sigma) \cap \mathrm{res}(T_{\sigma'})) =$$
$$= (\mathbb{C} \setminus \mathrm{res}(T_\sigma)) \cup (\mathbb{C} \setminus \mathrm{res}(T_{\sigma'})) = \mathrm{Sp}(T_\sigma) \cup \mathrm{Sp}(T_{\sigma'}) \subset \sigma \cup \sigma' = \mathrm{Sp}(T).$$

Учитывая, что $\sigma \cap \sigma' = \varnothing$, получаем требуемое. $\triangleright$

8.2.13. Теорема о разложении интеграла Рисса — Данфорда. *Пусть σ — спектральное множество оператора $T \in B(X)$. Разложение $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$ приводит представление $\mathscr{R}_T$ алгебры $\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T))$ в X к прямой сумме представлений $\mathscr{R}_\sigma$ и $\mathscr{R}_{\sigma'}$. При этом коммутативны следующие диаграммы представлений:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T)) \arrow[r, "\overline{\varkappa_\sigma}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_\sigma"'] & \mathscr{H}(\sigma) \arrow[d, "\mathscr{R}_{T_\sigma}"] \\
& B(X_\sigma)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T)) \arrow[r, "\overline{\varkappa_{\sigma'}}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_{\sigma'}"'] & \mathscr{H}(\sigma') \arrow[d, "\mathscr{R}_{T_{\sigma'}}"] \\
& B(X_{\sigma'})
\end{tikzcd}
$$

Здесь $\overline{\varkappa_\sigma}(\overline{f}) := \overline{\varkappa_\sigma f}$, $\overline{\varkappa_{\sigma'}}(\overline{f}) := \overline{\varkappa_{\sigma'} f}$ для $f \in H(\mathrm{Sp}(T))$ — представления, порожденные сужениями f на σ и σ' соответственно. $\lhd\rhd$

8.3. Идеал компактных операторов и проблема аппроксимации

8.3.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Для линейного оператора $K \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *оператор K компактен: $K \in \mathscr{K}(X,\ Y)$;*

(2) *существуют окрестность нуля U в X и компактное множество V в Y такие, что $K(U) \subset V$;*

(3) *образ при отображении K любого ограниченного множества в X относительно компактен в Y;*

(4) *образ любого ограниченного в X множества (при отображении K) вполне ограничен в Y;*

(5) *для каждой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек единичного шара B_X последовательность $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержит некоторую фундаментальную подпоследовательность.* $\lhd\rhd$

8.3.2. Теорема. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда*

(1) *$\mathscr{K}(X,\ Y)$ — замкнутое подпространство $B(X,\ Y)$;*

(2) *для любых банаховых пространств W и Z выполнено*

$$B(Y,\ Z) \circ \mathscr{K}(X,\ Y) \circ B(W,\ X) \subset \mathscr{K}(W,\ Z),$$