8.2.13. Теорема о разложении интеграла Рисса — Данфорда. *Пусть σ — спектральное множество оператора $T \in B(X)$. Разложение $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$ приводит представление $\mathscr{R}_T$ алгебры $\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T))$ в X к прямой сумме представлений $\mathscr{R}_\sigma$ и $\mathscr{R}_{\sigma'}$. При этом коммутативны следующие диаграммы представлений:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T)) \arrow[r, "\overline{\varkappa_\sigma}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_\sigma"'] & \mathscr{H}(\sigma) \arrow[d, "\mathscr{R}_{T_\sigma}"] \\
& B(X_\sigma)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathrm{Sp}(T)) \arrow[r, "\overline{\varkappa_{\sigma'}}"] \arrow[dr, "\mathscr{R}_{\sigma'}"'] & \mathscr{H}(\sigma') \arrow[d, "\mathscr{R}_{T_{\sigma'}}"] \\
& B(X_{\sigma'})
\end{tikzcd}
$$

Здесь $\overline{\varkappa_\sigma}(\overline{f}) := \overline{\varkappa_\sigma f}$, $\overline{\varkappa_{\sigma'}}(\overline{f}) := \overline{\varkappa_{\sigma'} f}$ для $f \in H(\mathrm{Sp}(T))$ — представления, порожденные сужениями f на σ и σ' соответственно. $\triangleleft\triangleright$

8.3. Идеал компактных операторов и проблема аппроксимации

8.3.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Для линейного оператора $K \in \mathscr{L}(X, Y)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *оператор K компактен: $K \in \mathscr{K}(X, Y)$;*

(2) *существуют окрестность нуля U в X и компактное множество V в Y такие, что $K(U) \subset V$;*

(3) *образ при отображении K любого ограниченного множества в X относительно компактен в Y;*

(4) *образ любого ограниченного в X множества (при отображении K) вполне ограничен в Y;*

(5) *для каждой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек единичного шара B_X последовательность $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержит некоторую фундаментальную подпоследовательность.* $\triangleleft\triangleright$

8.3.2. Теорема. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда*

(1) *$\mathscr{K}(X, Y)$ — замкнутое подпространство $B(X, Y)$;*

(2) *для любых банаховых пространств W и Z выполнено*

$$B(Y, Z) \circ \mathscr{K}(X, Y) \circ B(W, X) \subset \mathscr{K}(W, Z),$$

т. е. если $S \in B(W,\ X)$, $T \in B(Y,\ Z)$, *а* $K \in \mathscr{K}(X,\ Y)$, *то* $TKS \in \mathscr{K}(W,\ Z)$;

(3) $I_{\mathbb{F}} \in \mathscr{K}(\mathbb{F}) := \mathscr{K}(\mathbb{F},\ \mathbb{F})$ *для основного поля* $\mathbb{F}$.

$\lhd$ То, что $\mathscr{K}(X,\ Y)$ — подпространство $B(X,\ Y)$, следует из 8.3.1. Если $K_n \in \mathscr{K}(X,\ Y)$ и $K_n \to K$, то для $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n имеем $\|Kx - K_n x\| \leq \|K - K_n\|\ \|x\| \leq \varepsilon$, как только $x \in B_X$. Таким образом, $K_n(B_X)$ служит *ε-сетью* ($= B_\varepsilon$-сетью) для $K(B_X)$. Остается сослаться на 4.6.4, чтобы закончить доказательство замкнутости $\mathscr{K}(X,\ Y)$. Прочие утверждения теоремы ясны. $\rhd$

8.3.3. Замечание. Теорему 8.3.2 часто выражают следующими словами: «класс всех компактных операторов представляет собой *операторный идеал*». При этом имеют в виду очевидную аналогию тому, что $\mathscr{K}(X) := \mathscr{K}(X,\ X)$ представляет собой (двусторонний замкнутый) идеал в алгебре $B(X)$, т. е. $\mathscr{K}(X) \circ B(X) \subset \mathscr{K}(X)$ и $B(X) \circ \mathscr{K}(X) \subset \mathscr{K}(X)$.

8.3.4. *Теорема Калкина.* *Идеалы* 0, $\mathscr{K}(l_2)$, $B(l_2)$ *составляют полный перечень замкнутых двусторонних идеалов алгебры* $B(l_2)$ *ограниченных эндоморфизмов гильбертова пространства* l_2.

8.3.5. Замечание. В связи с 8.3.4 ясно, что определенную роль в теории операторов должна играть алгебра $B(X)/\mathscr{K}(X)$, называемая *алгеброй Калкина* (в X). Эту роль отчасти можно видеть в 8.5.

8.3.6. Определение. Оператор $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ называют *конечномерным*, если $T \in B(X,\ Y)$ и $\operatorname{im} T$ — конечномерное подпространство. При этом пишут $T \in F(X,\ Y)$.

8.3.7. *Конечномерные операторы составляют линейную оболочку множества ограниченных одномерных операторов*:

$$T \in F(X,\ Y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists\, x'_1, \dots, x'_n \in X',\ y_1, \dots, y_n \in Y)\ T = \sum_{k=1}^{n} x'_k \otimes y_k. \ \lhd\rhd$$

8.3.8. Определение. Пусть Q — (непустой) компакт в X. Для $T \in B(X,\ Y)$ положим

$$\|T\|_Q := \sup \|T(Q)\|.$$

Совокупность всех полунорм вида $\|\cdot\|_Q$ в $B(X,\ Y)$ называют *мультинормой Аренса* в $B(X,\ Y)$ и обозначают $\varkappa_{B(X,Y)}$. Соответствующую топологию называют *топологией равномерной сходимости на компактах.*

8.3.9. Теорема Гротендика. *Пусть X — банахово пространство. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для каждых $\varepsilon > 0$ и компактного множества Q в X найдется оператор $T \in F(X) := F(X,\ X)$ такой, что $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ для всех $x \in Q$;*

(2) *для любого банахова пространства W подпространство $F(W,\ X)$ плотно в $B(W,\ X)$ относительно мультинормы Аренса $\varkappa_{B(W,X)}$;*

(3) *для любого банахова пространства Y подпространство $F(X,\ Y)$ плотно в $B(X,\ Y)$ относительно мультинормы Аренса $\varkappa_{B(X,Y)}$.*

$\lhd$ Ясно, что (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (1). Поэтому установим, что (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2): Если $T \in B(W,\ X)$ и $\varnothing \neq Q \subset W$ — компакт в W, то, по теореме Вейерштрасса 4.4.5, $T(Q)$ — компакт в X и, стало быть, для $\varepsilon > 0$ по условию существует оператор $T_0 \in F(X)$ такой, что $\|T_0 - I_X\|_{T(Q)} = \|T_0T - T\|_Q \leq \varepsilon$. Несомненно, что $T_0T \in F(W,\ X)$.

(1) $\Rightarrow$ (3): Пусть $T \in B(X,\ Y)$. Если $T = 0$, то доказывать ничего не надо. Пусть $T \neq 0$, $\varepsilon > 0$ и Q — непустой компакт в X. По условию существует оператор $T_0 \in F(X)$ такой, что $\|T_0 - I_X\|_Q \leq \varepsilon\|T\|^{-1}$. Тогда $\|TT_0 - T\|_Q \leq \|T\|\ \|T_0 - I_X\|_Q \leq \varepsilon$. Кроме того, $TT_0 \in F(X,\ Y)$. $\rhd$

8.3.10. Определение. Банахово пространство, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 8.3.9 (1)–8.3.9 (3), называют обладающим *свойством аппроксимации.*

8.3.11. *Критерий Гротендика.* *Банахово пространство X обладает свойством аппроксимации в том и только в том случае, если для каждого банахова пространства W выполнено $\operatorname{cl} F(W,\ X) = \mathscr{K}(W,\ X)$, где замыкание вычислено относительно операторной нормы.*

8.3.12. Замечание. Долго считали (и, разумеется, не могли доказать), что все банаховы пространства обладают свойством аппроксимации. Поэтому найденный П. Энфло на основе тонких рассуждений пример банахова пространства без свойства аппроксимации был воспринят в конце 70-х годов как сенсационный. В настоящее время известны многие контрпримеры такого рода.

8.3.13. Контрпример Шанковского. *Пространство $B(l_2)$ не обладает свойством аппроксимации.*

8.3.14. Контрпримеры Дэви — Фигеля — Шанковского. *Пространства l_p при $p \neq 2$ и c_0 имеют замкнутые подпространства, не обладающие свойством аппроксимации.*

8.4. Теория Рисса — Шаудера

8.4.1. ***Лемма об ε-перпендикуляре.*** *Пусть X_0 — замкнутое подпространство банахова пространства X и $X \neq X_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ в X имеется ε-перпендикуляр к X_0, т. е. такой элемент $x_\varepsilon \in X$, что $\|x_\varepsilon\| = 1$ и $d(x_\varepsilon,\ X_0) := \inf\ d_{\|\cdot\|}(\{x_\varepsilon\} \times X_0) \geq 1 - \varepsilon$.*

$\lhd$ Пусть $1 > \varepsilon$ и $x \in X \setminus X_0$. Понятно, что $d := d(x,\ X_0) > 0$. В подпространстве X_0 подыщем x', для которого $\|x - x'\| \leq d/(1-\varepsilon)$ (это возможно, ибо $d/(1-\varepsilon) > d$). Положим $x_\varepsilon := (x - x')\|x - x'\|^{-1}$. Тогда $\|x_\varepsilon\| = 1$. Наконец, для $x_0 \in X_0$ выполнено

$$\|x_0 - x_\varepsilon\| = \left\| x_0 - \frac{x - x'}{\|x - x'\|} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|x' - x\|}\ \|(\|x - x'\|x_0 + x') - x\| \geq \frac{d(x,\ X_0)}{\|x' - x\|} \geq 1 - \varepsilon.\ \rhd$$

8.4.2. ***Критерий Рисса.*** *Пусть X — банахово пространство. Тождественный оператор в X компактен в том и только в том случае, если X конечномерно.*

$\lhd$ Нуждается в проверке лишь стрелка $\Rightarrow$. Если известно, что X не является конечномерным пространством, то в X можно указать последовательность конечномерных подпространств $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ такую, что $X_{n+1} \neq X_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. На основании 8.4.1 существует последовательность (x_n), для которой $x_{n+1} \in X_{n+1}$, $\|x_{n+1}\| = 1$ и $d(x_{n+1},\ X_n) \geq 1/2$, т. е. последовательность 1/2-перпендикуляров к X_n в X_{n+1}. Ясно, что $d(x_m,\ x_k) \geq 1/2$ для $m \neq k$. Иными словами, последовательность (x_n) не содержит фундаментальной подпоследовательности. Значит, по 8.3.1 оператор I_X не является компактным. $\rhd$