проксимации. Поэтому найденный П. Энфло на основе тонких рассуждений пример банахова пространства без свойства аппроксимации был воспринят в конце 70-х годов как сенсационный. В настоящее время известны многие контрпримеры такого рода.

**8.3.13.** Контрпример Шанковского. *Пространство $B(l_2)$ не обладает свойством аппроксимации.*

**8.3.14.** Контрпримеры Дэви — Фигеля — Шанковского. *Пространства $l_p$ при $p \neq 2$ и $c_0$ имеют замкнутые подпространства, не обладающие свойством аппроксимации.*

## 8.4. Теория Рисса — Шаудера

**8.4.1. *Лемма об $\varepsilon$-перпендикуляре.*** *Пусть $X_0$ — замкнутое подпространство банахова пространства $X$ и $X \neq X_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ в $X$ имеется $\varepsilon$-перпендикуляр к $X_0$, т. е. такой элемент $x_\varepsilon \in X$, что $\|x_\varepsilon\| = 1$ и $d(x_\varepsilon,\ X_0) := \inf\ d_{\|\cdot\|}(\{x_\varepsilon\} \times X_0) \geq 1 - \varepsilon$.*

$\lhd$ Пусть $1 > \varepsilon$ и $x \in X \setminus X_0$. Понятно, что $d := d(x,\ X_0) > 0$. В подпространстве $X_0$ подыщем $x'$, для которого $\|x - x'\| \leq d/(1-\varepsilon)$ (это возможно, ибо $d/(1-\varepsilon) > d$). Положим $x_\varepsilon := (x - x')\|x - x'\|^{-1}$. Тогда $\|x_\varepsilon\| = 1$. Наконец, для $x_0 \in X_0$ выполнено

$$\|x_0 - x_\varepsilon\| = \left\| x_0 - \frac{x - x'}{\|x - x'\|} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|x' - x\|}\, \|(\|x - x'\|x_0 + x') - x\| \geq \frac{d(x,\ X_0)}{\|x' - x\|} \geq 1 - \varepsilon. \ \rhd$$

**8.4.2. *Критерий Рисса.*** *Пусть $X$ — банахово пространство. Тождественный оператор в $X$ компактен в том и только в том случае, если $X$ конечномерно.*

$\lhd$ Нуждается в проверке лишь стрелка $\Rightarrow$. Если известно, что $X$ не является конечномерным пространством, то в $X$ можно указать последовательность конечномерных подпространств $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ такую, что $X_{n+1} \neq X_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. На основании 8.4.1 существует последовательность $(x_n)$, для которой $x_{n+1} \in X_{n+1}$, $\|x_{n+1}\| = 1$ и $d(x_{n+1},\ X_n) \geq 1/2$, т. е. последовательность $1/2$-перпендикуляров к $X_n$ в $X_{n+1}$. Ясно, что $d(x_m,\ x_k) \geq 1/2$ для $m \neq k$. Иными словами, последовательность $(x_n)$ не содержит фундаментальной подпоследовательности. Значит, по 8.3.1 оператор $I_X$ не является компактным. $\rhd$

**8.4.3.** *Пусть $T \in \mathscr{K}(X,\ Y)$, где $X,\ Y$ — банаховы пространства. Оператор $T$ нормально разрешим в том и только в том случае, если $T$ конечномерен.*

$\lhd$ Нуждается в проверке лишь импликация $\Rightarrow$.

Пусть $Y_0 := \operatorname{im} T$ — замкнутое подпространство в $Y$. По теореме Банаха о гомоморфизме 7.4.4 образ единичного шара $T(B_X)$ — окрестность нуля в $Y_0$. Кроме того, в силу компактности $T$ множество $T(B_X)$ относительно компактно в $Y_0$. Остается применить 8.4.2 к $Y_0$. $\rhd$

**8.4.4.** *Пусть $X$ — банахово пространство и $K \in \mathscr{K}(X)$. Тогда оператор $1 - K$ нормально разрешим.*

$\lhd$ Положим $T := 1 - K$. Пусть $X_1 := \ker T$. Несомненно, что $X_1$ конечномерно по 8.4.2. В соответствии с 7.4.11 (1) конечномерное подпространство дополняемо. Обозначим $X_2$ топологическое дополнение $X_1$. Учитывая, что $X_2$ — банахово пространство и равенство $T(X) = T(X_2)$, следует установить, что для некоторого $t > 0$ выполнено $\|Tx\| \geq t\|x\|$ для всех $x \in X_2$. В противном случае найдется последовательность $(x_n)$ таких элементов, что $\|x_n\| = 1$, $x_n \in X_2$ и $Tx_n \to 0$. Используя компактность $K$, можно считать, что $(Kx_n)$ сходится. Положим $y := \lim Kx_n$. Тогда последовательность $(x_n)$ сходится к $y$, ибо $y = \lim(Tx_n + Kx_n) = \lim x_n$. При этом $Ty = \lim Tx_n = 0$, т. е. $y \in X_1$. Кроме того, несомненно, $y \in X_2$. Итак, $y \in X_1 \cap X_2$, т. е. $y = 0$. Получили противоречие ($\|y\| = \lim \|x_n\| = 1$). $\rhd$

**8.4.5.** *Для всякого $\varepsilon > 0$ вне круга радиуса $\varepsilon$ с центром в нуле может лежать лишь конечное множество собственных чисел компактного оператора.*

$\lhd$ Допустим, что вопреки утверждаемому есть последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различных собственных чисел оператора $K$, таких что $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, $0 \neq x_n \in \ker(\lambda_n - K)$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda_n$. Установим прежде всего, что множество $\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ линейно независимо. В самом деле, пусть уже известно, что линейно независимо множество $\{x_1, \dots, x_n\}$. Предположим, что $x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Тогда $0 = (\lambda_{n+1} - K)x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda_{n+1} - \lambda_k)x_k$. Следовательно, $\alpha_k = 0$ для $k := 1, \dots, n$. Отсюда вытекает заведомо ложное равенство $x_{n+1} = 0$.

Положим $X_n := \mathscr{L}(\{x_1, \dots, x_n\})$. По определению $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, причем, как уже доказано, $X_{n+1} \neq X_n$ для $n \in \mathbb{N}$. В силу 8.4.1 имеется последовательность $(\overline{x}_n)$ такая, что $\overline{x}_{n+1} \in X_{n+1}$, $\|\overline{x}_{n+1}\| = 1$ и $d(\overline{x}_{n+1},\ X_n) \geq 1/2$. При $m > k$ прямой подсчет показывает, что $z := (\lambda_{m+1} - K)\overline{x}_{m+1} \in X_m$ и $z + K\overline{x}_k \in X_m + X_k \subset X_m$. Значит,

$$\|K\overline{x}_{m+1} - K\overline{x}_k\| = \| - \lambda_{m+1}\overline{x}_{m+1} + K\overline{x}_{m+1} + \lambda_{m+1}\overline{x}_{m+1} - K\overline{x}_k\| =$$

$$= \|\lambda_{m+1}\overline{x}_{m+1} - (z + K\overline{x}_k)\| \geq |\lambda_{m+1}| d(\overline{x}_{m+1},\ X_m) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Иными словами, последовательность $(K\overline{x}_n)$ не содержит фундаментальной подпоследовательности. $\rhd$

**8.4.6. Теорема Шаудера.** *Пусть $X$, $Y$ — банаховы пространства (над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$). Тогда*

$$K \in \mathscr{K}(X,\ Y) \Leftrightarrow K' \in \mathscr{K}(Y',\ X').$$

$\lhd$ $\Rightarrow$: Заметим прежде всего, что отображение сужения $x' \mapsto x'|_{B_X}$ осуществляет изометрию $X'$ в $l_\infty(B_X)$. Поэтому для установления относительной компактности $K'(B_{Y'})$ следует доказать относительную компактность множества $V := \{K'y'|_{B_X}\ :\ \ y' \in B_{Y'}\}$. Ввиду того, что для $x \in B_X$ и $y' \in B_{Y'}$ выполнено $K'y'|_{B_X}(x) = y' \circ K|_{B_X}(x) = y'(Kx)$, рассмотрим компакт $Q := \operatorname{cl} K(B_X)$ и отображение $\overset{\circ}{K} : C(Q,\ \mathbb{F}) \to l_\infty(B_X)$, определенное соотношением $\overset{\circ}{K}g : x \mapsto g(Kx)$. Несомненно, что оператор $\overset{\circ}{K}$ ограничен, а следовательно, и непрерывен. Пусть теперь $S := \{y'|_Q\ :\ \ y' \in B_{Y'}\}$. Ясно, что $S$ — равностепенно непрерывное и в то же время ограниченное подмножество $C(Q,\ \mathbb{F})$. Значит, по теореме Асколи — Арцела 4.6.10, $S$ относительно компактно. По теореме Вейерштрасса 4.4.5 заключаем, что относительно компактно множество $\overset{\circ}{K}(S)$. Осталось заметить, что для $y' \in B_{Y'}$ выполнено $\overset{\circ}{K}y'|_Q = K'y'|_{B_X}$, т. е. $\overset{\circ}{K}(S) = V$.

$\Leftarrow$: Если $K' \in \mathscr{K}(Y',\ X')$, то по уже доказанному выполняется $K'' \in \mathscr{K}(X'',\ Y'')$. В силу леммы о двойном штриховании 7.6.6, $K''|_X = K$. Отсюда вытекает, что оператор $K$ компактный. $\rhd$

**8.4.7.** *Ненулевые точки спектра компактного оператора изолированы (т. е. всякая такая точка составляет спектральное множество).*

$\triangleleft$ Учитывая 8.4.4 и принцип штрихования последовательностей 7.6.13, видим, что любая ненулевая точка спектра компактного оператора является либо его собственным числом, либо собственным числом сопряженного оператора. Привлекая 8.4.5 и 8.4.6, заключаем, что вне круга ненулевого радиуса может лежать лишь конечное число точек спектра рассматриваемого оператора. $\triangleright$

**8.4.8. Теорема Рисса — Шаудера.** *Спектр компактного оператора, заданного в бесконечномерном пространстве, содержит нуль. Ненулевые точки спектра — собственные числа, каждому из которых отвечает конечномерное собственное подпространство. При этом вне любого круга ненулевого радиуса с центром в нуле лежит конечное множество точек спектра рассматриваемого оператора.*

$\triangleleft$ Для оператора $K \in \mathscr{K}(X)$ следует установить только импликацию

$$0 \neq \lambda \in \operatorname{Sp}(K) \Rightarrow \ker(\lambda - K) \neq 0.$$

Разберем сначала случай $\mathbb{F} := \mathbb{C}$. Отметим, что $\{\lambda\}$ — спектральное множество. Полагая $g(z) := 1/z$ в некоторой окрестности $\lambda$ и $g(z) := 0$ для $z$ в подходящей окрестности $\{\lambda\}'$, видим: $\overline{\varkappa_{\{\lambda\}}} = \overline{g}\overline{I_{\mathbb{C}}}$. Стало быть, на основании 8.2.3 и 8.2.10, $P_{\{\lambda\}} = \overline{g}(K)K$. В силу 8.3.2 (2), $P_{\{\lambda\}} \in \mathscr{K}(X)$. Из 8.4.3 вытекает, что $\operatorname{im} P_{\{\lambda\}}$ — конечномерное пространство. Осталось привлечь теорему о разбиении спектра 8.2.12.

В случае $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ следует провести процесс «*комплексификации*». Именно, нужно рассмотреть в пространстве $X^2$ умножение на элемент $\mathbb{C}$, порожденное правилом $i(x,\ y) := (-y,\ x)$. Полученное комплексное векторное пространство обозначают $X \oplus iX$. В пространстве $X \oplus iX$ следует ввести оператор $\overline{K}(x,\ y) := (Kx,\ Ky)$. Наделяя $X \oplus iX$ подходящей нормой (ср. 7.3.2), видим, что оператор $\overline{K}$ компактен, причем $\lambda \in \operatorname{Sp}(\overline{K})$. Значит, $\lambda$ — собственное число $\overline{K}$ по уже доказанному. Отсюда вытекает, что $\lambda$ — собственное число оператора $K$. $\triangleright$

**8.4.9. Теорема.** *Пусть $X$ — комплексное банахово пространство, а $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, обращающаяся в нуль лишь в нуле и такая, что для некоторого $T \in B(X)$ выполнено $f(T) \in \mathscr{K}(X)$. Тогда любая отличная от нуля точка $\lambda$ спектра $T$ изолирована и проектор Рисса $P_{\{\lambda\}}$ компактен.*

$\triangleleft$ Допустим противное, т. е. пусть найдется последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различных точек $\operatorname{Sp}(T)$ такая, что $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ (в частности, $X$ бесконечномерно). Тогда $f(\lambda_n) \to f(\lambda)$, причем $f(\lambda) \neq 0$ по условию. По теореме об отображении спектра 8.2.5, $\operatorname{Sp}(f(T)) = f(\operatorname{Sp}(T))$. Таким образом, по 8.4.8 для всех достаточно больших $n$ выполнено $f(\lambda_n) = f(\lambda)$. Отсюда вытекает, что $f(z) = f(\lambda)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и, стало быть, $f(T) = f(\lambda)$. По критерию 8.4.2 в этом случае $X$ конечномерно. Получили противоречие, означающее, что $\lambda$ — изолированная точка $\operatorname{Sp}(T)$. Полагая $g(z) := \underline{f}(z)^{-1}$ в некоторой не содержащей нуля окрестности $\lambda$, имеем, что $\overline{g}\,\overline{f} = \overline{\varkappa_{\{\lambda\}}}$. Следовательно, по теореме Гельфанда — Данфорда 8.2.3, $P_{\{\lambda\}} = g(T)f(T)$, т. е. в силу 8.3.2 (2) проектор Рисса $P_{\{\lambda\}}$ компактен. $\triangleright$

**8.4.10.** Замечание. Теорему 8.4.9 иногда называют «обобщенной теоремой Рисса — Шаудера».

## 8.5. Нётеровы и фредгольмовы операторы

**8.5.1.** Определение. Пусть $X,\ Y$ — банаховы пространства (над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$). Оператор $T \in B(X,\ Y)$ называют ***нётеровым*** и пишут $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$, если его ядро $\ker T := T^{-1}(0)$ и коядро $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{im} T$ конечномерны, т. е. если конечны величины

$$\alpha(T) := \dim \ker T; \quad \beta(T) := \dim \operatorname{coker} T.$$

Целое число $\operatorname{ind} T := \alpha(T) - \beta(T)$ называют *индексом* оператора $T$.

**8.5.2.** Определение. Нётеров оператор нулевого индекса называют ***фредгольмовым.***

**8.5.3.** *Каждый нётеров оператор нормально разрешим.*

$\triangleleft$ Следует из критерия Като 7.4.20. $\triangleright$

**8.5.4.** *Для оператора $T \in B(X,\ Y)$ выполнено*

$$T \in \mathscr{N}(X,\ Y) \Leftrightarrow T' \in \mathscr{N}(Y',\ X').$$

*При этом* $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} T'$.

$\triangleleft$ В силу 2.3.5 (6), 8.5.3, 5.5.4 и принципа штрихования 7.6.13 следующие пары сопряженных последовательностей:

$$0 \to \ker T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{coker} T \to 0;$$