$\lhd$ Допустим противное, т. е. пусть найдется последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различных точек $\mathrm{Sp}(T)$ такая, что $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ (в частности, X бесконечномерно). Тогда $f(\lambda_n) \to f(\lambda)$, причем $f(\lambda) \neq 0$ по условию. По теореме об отображении спектра 8.2.5, $\mathrm{Sp}(f(T)) = f(\mathrm{Sp}(T))$. Таким образом, по 8.4.8 для всех достаточно больших n выполнено $f(\lambda_n) = f(\lambda)$. Отсюда вытекает, что $f(z) = f(\lambda)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и, стало быть, $f(T) = f(\lambda)$. По критерию 8.4.2 в этом случае X конечномерно. Получили противоречие, означающее, что λ — изолированная точка $\mathrm{Sp}(T)$. Полагая $g(z) := f(z)^{-1}$ в некоторой не содержащей нуля окрестности λ, имеем, что $\overline{g}\,\overline{f} = \overline{\varkappa_{\{\lambda\}}}$. Следовательно, по теореме Гельфанда — Данфорда 8.2.3, $P_{\{\lambda\}} = g(T)f(T)$, т. е. в силу 8.3.2 (2) проектор Рисса $P_{\{\lambda\}}$ компактен. $\rhd$

8.4.10. Замечание. Теорему 8.4.9 иногда называют «обобщенной теоремой Рисса — Шаудера».

8.5. Нётеровы и фредгольмовы операторы

8.5.1. Определение. Пусть X, Y — банаховы пространства (над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$). Оператор $T \in B(X,\ Y)$ называют *нётеровым* и пишут $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$, если его ядро $\ker T := T^{-1}(0)$ и коядро $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{im} T$ конечномерны, т. е. если конечны величины

$$\alpha(T) := \dim \ker T; \quad \beta(T) := \dim \operatorname{coker} T.$$

Целое число $\operatorname{ind} T := \alpha(T) - \beta(T)$ называют *индексом* оператора T.

8.5.2. Определение. Нётеров оператор нулевого индекса называют *фредгольмовым.*

8.5.3. *Каждый нётеров оператор нормально разрешим.*

$\lhd$ Следует из критерия Като 7.4.20. $\rhd$

8.5.4. *Для оператора $T \in B(X,\ Y)$ выполнено*

$$T \in \mathscr{N}(X,\ Y) \Leftrightarrow T' \in \mathscr{N}(Y',\ X').$$

При этом $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} T'$.

$\lhd$ В силу 2.3.5 (6), 8.5.3, 5.5.4 и принципа штрихования 7.6.13 следующие пары сопряженных последовательностей:

$$0 \to \ker T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{coker} T \to 0;$$

$$0 \leftarrow (\ker T)' \leftarrow X' \xleftarrow{T'} Y' \leftarrow (\operatorname{coker} T)' \leftarrow 0;$$

$$0 \to \ker(T') \to Y' \xrightarrow{T'} X' \to \operatorname{coker}(T') \to 0;$$

$$0 \leftarrow (\ker(T'))' \leftarrow Y \xleftarrow{T} X \leftarrow (\operatorname{coker}(T'))' \leftarrow 0$$

одновременно точны. При этом $\alpha(T) = \beta(T')$ и $\beta(T) = \alpha(T')$ (ср. 7.6.14). $\triangleright$

8.5.5. *Оператор фредгольмов в том и только в том случае, если фредгольмов сопряженный к нему оператор.*

$\triangleleft$ Это частный случай 8.5.4. $\triangleright$

8.5.6. Альтернатива Фредгольма. *Для фредгольмова оператора T имеет место одна из следующих двух взаимоисключающих возможностей.*

(1) *Однородное уравнение $Tx = 0$ имеет только нулевое решение. Однородное сопряженное уравнение $T'y' = 0$ имеет только нулевое решение. Неоднородное уравнение $Tx = y$ имеет, и притом единственное, решение при любой правой части. Неоднородное сопряженное уравнение $T'y' = x'$ имеет, и притом единственное, решение при любой правой части.*

(2) *Однородное уравнение $Tx = 0$ имеет ненулевое решение. Однородное сопряженное уравнение $T'y' = 0$ имеет ненулевое решение. Однородное уравнение $Tx = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $x_1, \dots, x_n$. Однородное сопряженное уравнение $T'y' = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $y'_1, \dots, y'_n$. Неоднородное уравнение $Tx = y$ разрешимо в том и только в том случае, если $y'_1(y) = \ldots = y'_n(y) = 0$. При этом общее решение x есть сумма частного решения x_0 неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, т. е. имеет вид*

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad (\lambda_k \in \mathbb{F}).$$

Неоднородное сопряженное уравнение $T'y' = x'$ разрешимо в том и только в том случае, если $x'(x_1) = \ldots = x'(x_n) = 0$. При этом общее решение y' есть сумма частного решения y'_0 неоднородного сопряженного уравнения и общего решения однородного сопряженного уравнения, т. е. имеет вид

$$y' = y'_0 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k y'_k \quad (\mu_k \in \mathbb{F}).$$

$\lhd$ Переформулировка 8.5.5 с учетом леммы о полярах 7.6.11. $\rhd$

8.5.7. Примеры.

(1) Если T обратим, то T фредгольмов.

(2) Пусть $T \in \mathscr{L}(\mathbb{F}^n,\ \mathbb{F}^m)$. Пусть $\operatorname{rank} T := \dim \operatorname{im} T$ — *ранг* T. Тогда $\alpha(T) = n - \operatorname{rank} T$; $\beta(T) = m - \operatorname{rank} T$. Следовательно, $T \in \mathscr{N}(\mathbb{F}^n,\ \mathbb{F}^m)$ и $\operatorname{ind} T = n - m$.

(3) Пусть $X = X_1 \oplus X_2$ и $T \in B(X)$. Допустим, что указанное разложение X в прямую сумму приводит T к матричному виду

$$T \sim \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Несомненно, что T нётеров тогда и только тогда, когда нётеровы его части. При этом $\alpha(T) = \alpha(T_1) + \alpha(T_2)$, $\beta(T) = \beta(T_1) + \beta(T_2)$, т. е. $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_1 + \operatorname{ind} T_2$. $\lhd\rhd$

8.5.8. *Теорема Фредгольма.* *Пусть $K \in \mathscr{K}(X)$. Оператор $1 - K$ фредгольмов.*

$\lhd$ В самом деле, разберем сначала случай $\mathbb{F} := \mathbb{C}$. Если $1 \notin \operatorname{Sp}(K)$, то $1 - K$ обратим и $\operatorname{ind}(1 - K) = 0$. Если же $1 \in \operatorname{Sp}(K)$, то в силу теоремы Рисса — Шаудера 8.4.8 и теоремы о разбиении спектра 8.2.12 найдется разложение $X = X_1 \oplus X_2$ такое, что X_1 конечномерно, $1 \notin \operatorname{Sp}(K_2)$, где K_2 — часть K в X_2, при этом

$$1 - K \sim \begin{pmatrix} 1 - K_1 & 0 \\ 0 & 1 - K_2 \end{pmatrix}.$$

По 8.5.7 (2), $\operatorname{ind}(1 - K_1) = 0$. По 8.5.7 (3) выполнено $\operatorname{ind}(1 - K) = \operatorname{ind}(1 - K_1) + \operatorname{ind}(1 - K_2) = 0$.

В случае $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ проведем процесс «комплексификации» так же, как и в доказательстве 8.4.8. Именно, в пространстве $X \oplus iX$ рассмотрим оператор $\overline{K}(x,\ y) := (Kx,\ Ky)$. По уже установленному $\operatorname{ind}(1 - \overline{K}) = 0$. Остается заметить, что с учетом различия $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ выполнено $\alpha(1-K) = \alpha(1-\overline{K})$ и $\beta(1-K) = \beta(1-\overline{K})$. Окончательно $\operatorname{ind}(1 - K) = 0$. $\rhd$

8.5.9. Определение. Пусть задан $T \in B(X,\ Y)$. Оператор $L \in B(Y,\ X)$ называют *левым регуляризатором* T, если $LT - 1 \in \mathscr{K}(X)$. Оператор $R \in B(Y,\ X)$ называют *правым регуляризатором* T, если $TR - 1 \in \mathscr{K}(Y)$. Оператор $S \in B(Y,\ X)$ называют *почти обратным* к $T \in B(X,\ Y)$, если S является одновременно левым и правым регуляризатором T. Если у оператора T есть почти обратный, то T называют *почти обратимым.*

8.5.10. *Пусть L и R — соответственно левый и правый регуляризаторы T. Тогда $L - R \in \mathscr{K}(Y,\ X)$.*

$$\lhd\ LT = 1 + K_X\ (K_X \in \mathscr{K}(X)) \Rightarrow LTR = R + K_X R;$$
$$TR = 1 + K_Y\ (K_Y \in \mathscr{K}(Y)) \Rightarrow LTR = L + LK_Y \quad \rhd$$

8.5.11. *Если L — левый регуляризатор T и $K \in \mathscr{K}(Y,\ X)$, то $L + K$ также левый регуляризатор T.*

$$\lhd\ \ (L + K)T - 1 = (LT - 1) + KT \in \mathscr{K}(X)\ \ \rhd$$

8.5.12. *Оператор почти обратим в том и только в том случае, если у него есть правый и левый регуляризаторы.*

$\lhd$ Нуждается в проверке лишь импликация $\Leftarrow$. Пусть $L,\ R$ — соответственно левый и правый регуляризаторы T. По 8.5.10, $K := L - R \in \mathscr{K}(Y,\ X)$. Значит, по 8.5.11, $R = L - K$ — левый регуляризатор T. Итак, R — почти обратный к T. $\rhd$

8.5.13. Замечание. Из приведенного видно, что при $X = Y$ оператор S является почти обратным для T в том и только в том случае, если $\varphi(S)\varphi(T) = \varphi(T)\varphi(S) = 1$, где $\varphi : B(X) \to B(X)/\mathscr{K}(X)$ — каноническое отображение в алгебру Калкина. Иными словами, левые регуляризаторы — это прообразы левых обратных в алгебре Калкина и т. п.

8.5.14. *Критерий Нётера.* *Оператор является нётеровым в том и только в том случае, если он почти обратим.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$. Привлекая принцип дополняемости 7.4.10, рассмотрим разложения $X = \ker T \oplus X_1$ и $Y = \operatorname{im} T \oplus Y_1$ и конечномерные проекторы $P \in B(X)$ на $\ker T$ параллельно X_1 и $Q \in B(Y)$ на Y_1 параллельно $\operatorname{im} T$. Ясно, что сужение $T_1 := T|_{X_1}$ — обратимый оператор $T_1 : X_1 \to \operatorname{im} T$. Положим $S := T_1^{-1}(1 - Q)$. Оператор S можно считать элементом пространства $B(Y,\ X)$. При этом несомненно, что $ST + P = 1$ и $TS + Q = 1$.

$\Leftarrow$: Пусть S — почти обратный к T, т. е. $ST = 1 + K_X$ и $TS = 1 + K_Y$ для подходящих компактных операторов K_X и K_Y. Значит, $\ker T \subset \ker(1+K_X)$, т. е. $\ker T$ конечномерно в силу конечномерности $\ker(1 + K_X)$, обеспеченной 8.5.8. Помимо этого, $\operatorname{im} T \supset \operatorname{im}(1 + K_Y)$, т. е. из-за фредгольмовости $1 + K_Y$ образ T имеет конечную коразмерность. $\rhd$

8.5.15. *Следствие.* *Если $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ и $S \in B(Y,\ X)$ — почти обратный для T, то $S \in \mathscr{N}(Y,\ X)$.* $\lhd\rhd$

8.5.16. *Следствие.* *Произведение нётеровых операторов — это нётеров оператор.*

$\lhd$ Суперпозиция почти обратных операторов (в должном порядке) — почти обратный оператор к суперпозиции. $\rhd$

8.5.17. *Пусть задана точная последовательность*

$$0 \to X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_{n-1} \to X_n \to 0$$

конечномерных векторных пространств. Тогда имеет место тождество Эйлера

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim X_k = 0.$$

$\lhd$ При $n = 1$ точность последовательности $0 \to X_1 \to 0$ означает, что $X_1 = 0$, а при $n = 2$ точность $0 \to X_1 \to X_2 \to 0$ эквивалентна изоморфности X_1 и X_2 (см. 2.3.5 (4)). Таким образом, тождество Эйлера при $n := 1,\ 2$ несомненно.

Допустим теперь, что для $m \le n - 1$, где $n > 2$, требуемое уже установлено. Точную последовательность

$$0 \to X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_{n-2} \xrightarrow{T_{n-2}} X_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} X_n \to 0$$

можно сузить до точной последовательности

$$0 \to X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_{n-2} \xrightarrow{T_{n-2}} \ker T_{n-1} \to 0.$$

По допущению выполнено

$$\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \dim X_k + (-1)^{n-1} \dim \ker T_{n-1} = 0.$$

Помимо этого, поскольку T_{n-1} является эпиморфизмом, имеем

$$\dim X_{n-1} = \dim \ker T_{n-1} + \dim X_n.$$

Окончательно получаем

$$0 = \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \dim X_k + (-1)^{n-1} (\dim X_{n-1} - \dim X_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim X_k. \ \triangleright$$

8.5.18. *Теорема Аткинсона.* *Индекс произведения нётеровых операторов равен сумме индексов сомножителей.*

$\triangleleft$ Пусть $T \in \mathscr{N}(X, Y)$ и $S \in \mathscr{N}(Y, Z)$. В силу 8.5.16, $ST \in \mathscr{N}(X, Z)$. Привлекая лемму о снежинке 2.3.16, имеем точную последовательность конечномерных пространств

$$0 \to \ker T \to \ker ST \to \ker S \to \operatorname{coker} T \to \operatorname{coker} ST \to \operatorname{coker} S \to 0.$$

На основании 8.5.17

$$\alpha(T) - \alpha(ST) + \alpha(S) - \beta(T) + \beta(ST) - \beta(S) = 0,$$

откуда $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$. $\triangleright$

8.5.19. *Следствие.* *Пусть T — нётеров и S — почти обратный к T. Тогда* $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} S$.

$\triangleleft$ $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(1 + K)$ для некоторого компактного оператора K. По теореме 8.5.8, $1 + K$ — фредгольмов оператор. $\triangleright$

8.5.20. Теорема о компактных возмущениях. *Нётеровость и индекс сохраняются при компактных возмущениях: если даны* $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ *и* $K \in \mathscr{K}(X,\ Y)$, *то* $T + K \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ *и* $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.

$\vartriangleleft$ Пусть S — почти обратный к T, т. е. для $K_X \in \mathscr{K}(X)$ и $K_Y \in \mathscr{K}(Y)$ выполнено

$$ST = 1 + K_X; \quad TS = 1 + K_Y$$

(существование S обеспечивает 8.5.14). Ясно, что

$$S(T + K) = ST + SK = 1 + K_X + SK \in 1 + \mathscr{K}(X);$$

$$(T + K)S = TS + KS = 1 + K_Y + KS \in 1 + \mathscr{K}(Y),$$

т. е. S — почти обратный к $T+K$. В силу 8.5.14, $T+K \in \mathscr{N}(X,\ Y)$. При этом из 8.5.19 следуют равенства $\operatorname{ind}(T+K) = -\operatorname{ind} S$ и $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} S$. $\vartriangleright$

8.5.21. Теорема об ограниченных возмущениях. *Нётеровость и индекс сохраняются при достаточно малых ограниченных возмущениях: множество* $\mathscr{N}(X,\ Y)$ *открыто в пространстве ограниченных операторов, причем индекс* $\operatorname{ind} : \mathscr{N}(X,\ Y) \to \mathbb{Z}$ *— непрерывная функция.*

$\vartriangleleft$ Пусть $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$. По 8.5.14 найдутся операторы $S \in B(Y,\ X), K_X \in \mathscr{K}(X)$ и $K_Y \in \mathscr{K}(Y)$ такие, что

$$ST = 1 + K_X; \quad TS = 1 + K_Y.$$

Если $S = 0$, то пространства X и Y конечномерны по критерию Рисса 8.4.2, т. е. доказывать нечего — достаточно сослаться на 8.5.7 (2). Если же $S \neq 0$, то при всех $V \in B(X,\ Y)$, для которых $\|V\| < 1/\|S\|$, из неравенства 5.6.1 вытекает: $\|SV\| < 1$ и $\|VS\| < 1$. Значит, в силу 5.6.10 операторы $1 + SV$ и $1 + VS$ обратимы в $B(X)$ и в $B(Y)$ соответственно.

Имеем

$$(1 + SV)^{-1}S(T + V) = (1 + SV)^{-1}(1 + K_X + SV) =$$

$$= 1 + (1 + SV)^{-1}K_X \in 1 + \mathscr{K}(X),$$

т. е. $(1+SV)^{-1}S$ — левый регуляризатор $T+V$. Аналогично проверяется, что $S(1+VS)^{-1}$ — правый регуляризатор $T+V$. В самом деле,

$$(T+V)S(1+VS)^{-1} = (1+K_Y+VS)(1+VS)^{-1} =$$

$$= 1 + K_Y(1+VS)^{-1} \in 1 + \mathscr{K}(Y).$$

По 8.5.12, $T+V$ почти обратим. На основании 8.5.14, $T+V \in \mathscr{N}(X,\ Y)$. Этим доказана открытость $\mathscr{N}(X,\ Y)$. Учитывая, что регуляризаторы нётерова оператора почти обратны к нему (ср. 8.5.12), из 8.5.19 и 8.5.18 получаем

$$\operatorname{ind}(T+V) = -\operatorname{ind}((1+SV)^{-1}S) =$$

$$= -\operatorname{ind}(1+SV)^{-1} - \operatorname{ind} S = -\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$$

(ибо $(1+SV)^{-1}$ фредгольмов по 8.5.7 (1)). Последнее и означает непрерывность индекса. $\rhd$

8.5.22. *Критерий Никольского.* *Оператор фредгольмов в том и только в том случае, если он представляет собой сумму обратимого и компактного операторов.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Пусть $T \in \mathscr{N}(X,\ Y)$ и $\operatorname{ind} T = 0$. Рассмотрим разложения в прямые суммы банаховых пространств $X = X_1 \oplus \ker T$ и $Y = \operatorname{im} T \oplus Y_1$. Несомненно, что оператор T_1 — след оператора T на X_1 — осуществляет изоморфизм X_1 и $\operatorname{im} T$. Помимо этого, в силу 8.5.5, $\dim Y_1 = \beta(T) = \alpha(T)$, т. е. существует естественный изоморфизм $\mathrm{Id}\ : \ker T \to Y_1$. Таким образом, T допускает матричное представление

$$T \sim \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

$\Leftarrow$: Если $T := S + K$, где $K \in \mathscr{K}(X,\ Y)$ и $S^{-1} \in B(Y,\ X)$, то, по 8.5.20 и 8.5.7 (1), $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind}(S+K) = \operatorname{ind} S = 0$. $\rhd$

8.5.23. Замечание. Пусть $\operatorname{Inv}(X,\ Y)$ — множество обратимых операторов из X в Y (это множество открыто по теореме Банаха об обратимых операторах 5.6.12). Обозначим $\mathscr{F}(X,\ Y)$ множество всех фредгольмовых операторов, действующих из X в Y. Критерий Никольского теперь можно переписать в следующей форме:

$$\mathscr{F}(X,\ Y) = \mathrm{Inv}(X,\ Y) + \mathscr{K}(X,\ Y).$$

Как видно из доказательства 8.5.22, можно утверждать также, что

$$\mathscr{F}(X,\ Y) = \mathrm{Inv}(X,\ Y) + F(X,\ Y),$$

где, как обычно, $F(X,\ Y)$ — подпространство конечномерных операторов в пространстве $B(X,\ Y)$. ◁▷

Упражнения

8.1. Изучить интеграл Рисса — Данфорда в конечномерном пространстве.

8.2. Описать ядро интеграла Рисса — Данфорда.

8.3. Пусть (f_n) — функции, голоморфные в окрестности U спектра оператора T. Доказать, что из равномерной сходимости (f_n) к нулю на U вытекает сходимость $(f_n(T))$ к нулю в операторной норме.

8.4. Пусть σ — изолированная часть спектра оператора T. Допустим, что часть $\sigma' := \mathrm{Sp}(T) \setminus \sigma$ отделяется от σ окружностью с центром в a и радиусом r таким образом, что $\sigma \subset \{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| < r\}$. Доказать, что для проектора Рисса P_σ выполнено

$$P_\sigma = \lim_n\, (1 - z^{-n}(T-a)^n)^{-1};$$

$$x \in \mathrm{im}(P_\sigma) \Leftrightarrow \limsup_n \|(a-T)^n x\|^{\frac{1}{n}} < r.$$

8.5. Выяснить, при каких условиях компактен проектор.

8.6. Доказать, что каждое замкнутое подпространство, содержащееся в области значения компактного оператора в банаховом пространстве, конечномерно.

8.7. Доказать, что линейный оператор переводит каждое замкнутое линейное подпространство в замкнутое множество в том и только в том случае, если этот оператор нормально разрешим и его ядро конечномерно или коконечномерно (имеет конечномерное алгебраическое дополнение).

8.8. Пусть $1 \le p < r < +\infty$. Доказать, что каждый ограниченный оператор из l_r в l_p и из c_0 в l_p является компактным.