Глава 9

Экскурс в общую топологию

9.1. Предтопологии и топологии

9.1.1. Определение. Пусть X — некоторое множество. Отображение $\tau : X \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ называют *предтопологией* на X, если

(1) $x \in X \Rightarrow \tau(x)$ — фильтр в X;

(2) $x \in X \Rightarrow \tau(x) \subset \operatorname{fil}\{x\}$.

Элементы $\tau(x)$ называют *(пред)окрестностями* x. Пару (X, τ) (а часто и множество X) называют *предтопологическим пространством.*

9.1.2. Определение. Пусть $\mathscr{T}(X)$ — совокупность всех предтопологий на X. Если $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{T}(X)$, то говорят, что τ_1 *сильнее* τ_2 (и пишут $\tau_1 \geq \tau_2$) при выполнении условия: $x \in X \Rightarrow \tau_1(x) \supset \tau_2(x)$.

9.1.3. *Множество $\mathscr{T}(X)$ с отношением «сильнее» представляет собой полную решетку.*

$\lhd$ Если $X = \varnothing$, то $\mathscr{T}(X) = \{\varnothing\}$ и доказывать ничего не надо. Если же $X \neq \varnothing$, то следует сослаться на 1.3.13. $\rhd$

9.1.4. Определение. Множество G в X называют *открытым*, если оно является (пред)окрестностью каждой своей точки (символически: $G \in \operatorname{Op}(\tau) \Leftrightarrow (\forall x \in G)(G \in \tau(x))$). Множество F в X называют *замкнутым*, если его дополнение открыто (символически: $F \in \operatorname{Cl}(\tau) \Leftrightarrow X \setminus F \in \operatorname{Op}(\tau)$).

9.1.5. *Объединение любого семейства и пересечение конечного семейства открытых множеств суть множества открытые. Пересече-*

ние любого семейства и объединение конечного семейства замкнутых множеств суть множества замкнутые. $\lhd\rhd$

9.1.6. *Пусть* $(X,\ \tau)$ — *предтопологическое пространство. Если* $x \in X$, *то положим*

$$U \in t(\tau)(x) \Leftrightarrow (\exists V \in \mathrm{Op}(\tau))\quad x \in V \ \&\ U \supset V.$$

Отображение $t(\tau) : x \mapsto t(\tau)(x)$ — *предтопология на* X. $\lhd\rhd$

9.1.7. Определение. Предтопологию τ на X называют *топологией*, если $\tau = t(\tau)$. Пару $(X,\ \tau)$ (а часто и множество X) в этом случае называют *топологическим пространством.* Множество всех топологий на X обозначают символом $\mathrm{T}(X)$.

9.1.8. Примеры.

(1) Метрическая топология.

(2) Топология мультинормированного пространства.

(3) Пусть $\tau_\circ := \inf \mathscr{T}(X)$. Ясно, что $\tau_\circ(x) = \{X\}$ для $x \in X$. Значит, $\mathrm{Op}(\tau_\circ) = \{\varnothing,\ X\}$ и, следовательно, $\tau_\circ = t(\tau_\circ)$, т. е. $\tau_\circ$ — топология. Эту топологию называют *тривиальной* или *антидискретной.*

(4) Пусть $\tau^\circ := \sup \mathscr{T}(X)$. Ясно, что $\tau^\circ(x) = \mathrm{fil}\,\{x\}$ для $x \in X$. Значит, $\mathrm{Op}(\tau^\circ) = 2^X$ и, следовательно, $\tau^\circ = t(\tau^\circ)$, т. е. τ° — топология. Эту топологию называют *дискретной.*

(5) *Пусть* Op — *совокупность подмножеств в* X, *выдерживающая образование объединения любого и пересечения конечного семейств. Тогда существует, и притом единственная, топология* τ *на* X *такая, что* $\mathrm{Op}(\tau) = \mathrm{Op}$.

$\lhd$ Положим $\tau(x) := \mathrm{fil}\,\{V \in \mathrm{Op} :\ x \in V\}$ для $x \in X$ (в случае $X = \varnothing$ доказывать нечего). Отметим, что $\tau(x) \neq \varnothing$ в силу того, что пересечение пустого семейства совпадает с X (ср.: $\inf \varnothing = +\infty$). Из построения выводим, что $t(\tau) = \tau$ и при этом $\mathrm{Op} \subset \mathrm{Op}(\tau)$. Если же $G \in \mathrm{Op}(\tau)$, то $G = \cup\{V :\ V \in \mathrm{Op},\ V \subset G\}$ и, стало быть, $G \in \mathrm{Op}$ по условию. Утверждение об единственности не вызывает сомнений. $\rhd$

9.1.9. *Пусть отображение* $t : \mathscr{T}(X) \to \mathscr{T}(X)$ *определено правилом* $t : \tau \mapsto t(\tau)$. *Тогда*

(1) $\mathrm{im}\, t = \mathrm{T}(X)$, *т. е.* $\tau \in \mathscr{T}(X) \Rightarrow t(\tau) \in \mathrm{T}(X)$;

(2) $\tau_1 \le \tau_2 \Rightarrow t(\tau_1) \le t(\tau_2)$ $(\tau_1,\ \tau_2 \in \mathscr{T}(X))$;
(3) $t \circ t = t$;
(4) $\tau \in \mathscr{T}(X) \Rightarrow t(\tau) \le \tau$;
(5) $\mathrm{Op}(\tau) = \mathrm{Op}(t(\tau))$ $(\tau \in \mathscr{T}(X))$.

$\lhd$ Включение $\mathrm{Op}(\tau) \supset \mathrm{Op}(t(\tau))$ справедливо потому, что быть открытым множеством относительно τ легче. Обратное включение $\mathrm{Op}(\tau) \subset \mathrm{Op}(t(\tau))$ следует из определения $t(\tau)$. Равенство $\mathrm{Op}(\tau) = \mathrm{Op}(t(\tau))$ делает все очевидным. $\rhd$

9.1.10. *Предтопология τ является топологией в X в том и только в том случае, если для $x \in X$ выполнено*

$$(\forall U \in \tau(x))(\exists V \in \tau(x)\ \&\ V \subset U)\ (\forall y)(y \in V \Rightarrow V \in \tau(y)).$$

$\lhd$ Вытекает из 9.1.9 (5). $\rhd$

9.1.11. *Пусть τ_1, $\tau_2 \in \mathrm{T}(X)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\tau_1 \ge \tau_2$;
(2) $\mathrm{Op}(\tau_1) \supset \mathrm{Op}(\tau_2)$;
(3) $\mathrm{Cl}(\tau_1) \supset \mathrm{Cl}(\tau_2)$. $\lhd\rhd$

9.1.12. Замечание. Как видно из 9.1.8 (5) и 9.1.11, топология пространства однозначно определена совокупностью всех своих открытых множеств. Поэтому множество $\mathrm{Op}(\tau)$ также называют *топологией* пространства X. В частности, совокупность открытых множеств предтопологического пространства $(X,\ \tau)$ определяет в X структуру топологического пространства $(X,\ t(\tau))$ с тем же запасом открытых множеств. В этой связи топологию $t(\tau)$ обычно называют *топологией, ассоциированной с предтопологией* τ.

9.1.13. *Теорема.* *Множество $\mathrm{T}(X)$ топологий на X с отношением «сильнее» представляет собой полную решетку. При этом для любого множества $\mathscr{E}$ в $\mathrm{T}(X)$ выполнено*

$$\sup\nolimits_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E} = \sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}.$$

$\lhd$ Имеем

$$t(\sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}) \ge \sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} t(\mathscr{E}) \ge \sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E} \ge t(\sup\nolimits_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}).$$

Таким образом, $\tau := \sup_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}$ входит в $\mathrm{T}(X)$. Ясно, что $\tau \ge \mathscr{E}$. Помимо этого, если $\tau_0 \ge \mathscr{E}$ и $\tau_0 \in \mathrm{T}(X)$, то $\tau_0 \ge \tau$ и, стало быть, $\tau = \sup_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}$. Осталось сослаться на 1.2.14. $\rhd$

9.1.14. Замечание. Для точной нижней границы явная формула сложнее:

$$\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E} = t(\inf_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}).$$

В то же время, если в соответствии с 9.1.12 топологии заданы указанием систем открытых множеств, то ситуация упрощается:

$$U \in \mathrm{Op}(\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}) \Leftrightarrow (\forall \tau \in \mathscr{E})\ U \in \mathrm{Op}(\tau).$$

Иными словами,

$$\mathrm{Op}(\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}) = \bigcap_{\tau \in \mathscr{E}} \mathrm{Op}(\tau).$$

В этой связи часто говорят и о *пересечении топологий* (а не только об их точной нижней границе). $\triangleleft\triangleright$

9.2. Непрерывность

9.2.1. Замечание. Наличие топологии в пространстве, очевидно, позволяет говорить о таких вещах, как внутренность и замыкание множеств, сходимость фильтров и обобщенных последовательностей и т. п. Этим обстоятельством мы уже пользовались при знакомстве с мультинормированными пространствами. Отметим полноты ради, что в топологическом пространстве справедливы следующие аналоги 4.1.19 и 4.2.1.

9.2.2. *Теорема Биркгофа.* *Для непустого множества и точки топологического пространства эквивалентны утверждения:*

(1) *данная точка есть точка прикосновения множества;*

(2) *существует некоторый фильтр, содержащий множество и сходящийся к данной точке;*

(3) *существует обобщенная последовательность элементов множества, сходящаяся к данной точке.* $\triangleleft\triangleright$

9.2.3. *Для отображения f одного топологического пространства в другое эквивалентны утверждения:*

(1) *прообраз открытого множества открыт;*

(2) *прообраз замкнутого множества замкнут;*

(3) *образ фильтра окрестностей произвольной точки x тоньше чем фильтр окрестностей точки $f(x)$;*