9.1.14. Замечание. Для точной нижней границы явная формула сложнее:

$$\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E} = t(\inf_{\mathscr{T}(X)} \mathscr{E}).$$

В то же время, если в соответствии с 9.1.12 топологии заданы указанием систем открытых множеств, то ситуация упрощается:

$$U \in \mathrm{Op}(\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}) \Leftrightarrow (\forall \tau \in \mathscr{E})\ U \in \mathrm{Op}(\tau).$$

Иными словами,

$$\mathrm{Op}(\inf_{\mathrm{T}(X)} \mathscr{E}) = \bigcap_{\tau \in \mathscr{E}} \mathrm{Op}(\tau).$$

В этой связи часто говорят и о *пересечении топологий* (а не только об их точной нижней границе). $\lhd\rhd$

9.2. Непрерывность

9.2.1. Замечание. Наличие топологии в пространстве, очевидно, позволяет говорить о таких вещах, как внутренность и замыкание множеств, сходимость фильтров и обобщенных последовательностей и т. п. Этим обстоятельством мы уже пользовались при знакомстве с мультинормированными пространствами. Отметим полноты ради, что в топологическом пространстве справедливы следующие аналоги 4.1.19 и 4.2.1.

9.2.2. *Теорема Биркгофа.* *Для непустого множества и точки топологического пространства эквивалентны утверждения:*

(1) *данная точка есть точка прикосновения множества;*

(2) *существует некоторый фильтр, содержащий множество и сходящийся к данной точке;*

(3) *существует обобщенная последовательность элементов множества, сходящаяся к данной точке.* $\lhd\rhd$

9.2.3. *Для отображения f одного топологического пространства в другое эквивалентны утверждения:*

(1) *прообраз открытого множества открыт;*

(2) *прообраз замкнутого множества замкнут;*

(3) *образ фильтра окрестностей произвольной точки x тоньше чем фильтр окрестностей точки $f(x)$;*

(4) *для произвольной точки x каждый фильтр, сходящийся к x, отображение f переводит в фильтр, сходящийся к $f(x)$;*

(5) *обобщенные последовательности, сходящиеся к произвольной точке x, отображение f переводит в обобщенные последовательности, сходящиеся к $f(x)$.* $\lhd\rhd$

9.2.4. Определение. Отображение, действующее из одного топологического пространства в другое, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 9.2.3 (1)–9.2.3 (5), называют *непрерывным.*

9.2.5. Замечание. Если $f : (X,\ \tau_X) \to (Y,\ \tau_Y)$ и 9.2.3 (5) выполнено для фиксированной точки $x \in X$, то иногда говорят, что f *непрерывно в точке* x (ср. 4.2.2). Нужно видеть, что отличие понятия непрерывности в точке от общего понятия непрерывности условно. Именно, если положить $\tau_x(x) := \tau_X(x)$ и $\tau_x(\overline{x}) := \operatorname{fil}\{\overline{x}\}$ для $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \neq x$, то непрерывность f в точке x (относительно топологии τ_X в X) равносильна непрерывности $f : (X,\ \tau_x) \to (Y,\ \tau_Y)$ (в каждой точке пространства X с топологией τ_x). $\lhd\rhd$

9.2.6. *Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{T}(X)$. Тогда $\tau_1 \geq \tau_2$ в том и только в том случае, если $I_X : (X,\ \tau_1) \to (X,\ \tau_2)$ непрерывно.* $\lhd\rhd$

9.2.7. *Пусть $f : (X,\ \tau) \to (Y,\ \omega)$ — непрерывное отображение и $\tau_1 \in \mathrm{T}(X)$ и $\omega_1 \in \mathrm{T}(Y)$ таковы, что $\tau_1 \geq \tau$ и $\omega \geq \omega_1$. Тогда $f : (X,\ \tau_1) \to (Y,\ \omega_1)$ непрерывно.*

$\lhd$ Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
(X,\tau) & \xrightarrow{f} & (Y,\omega) \\
I_X \uparrow & & \downarrow I_Y \\
(X,\tau_1) & \xrightarrow{f} & (Y,\omega_1)
\end{array}$$

Осталось отметить, что суперпозиция непрерывных отображений непрерывна. $\rhd$

9.2.8. *Теорема о прообразе топологии.* *Пусть $f : X \to (Y,\ \omega)$. Положим*

$$T_0 := \{\tau \in \mathrm{T}(X) :\ f : (X,\ \tau) \to (Y,\ \omega) \text{ непрерывно}\}.$$

Тогда топология $f^{-1}(\omega) := \inf T_0$ входит в T_0.

$\lhd$ Из 9.2.3 (1) вытекает

$$\tau \in T_0 \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow f^{-1}(\omega(f(x))) \subset \tau(x)).$$

Пусть $\overline{\tau}(x) := f^{-1}(\omega(f(x)))$. Несомненно, что $t(\overline{\tau}) = \overline{\tau}$. Помимо этого, $f(\overline{\tau}(x)) = f(f^{-1}(\omega(f(x)))) \supset \omega(f(x))$, т. е. $\overline{\tau} \in T_0$ по 9.2.3 (3). Таким образом, выполнено: $f^{-1}(\omega) = \overline{\tau}$. $\rhd$

9.2.9. Определение. Топологию $f^{-1}(\omega)$ называют *прообразом топологии* ω при отображении f.

9.2.10. Замечание. Теорему 9.2.8 часто выражают словами: «прообраз топологии при данном отображении — это слабейшая топология в области определения, в которой отображение непрерывно». При этом, как видно, например, из 9.1.14, открытые множества в прообразе топологии — это прообразы открытых множеств. В частности, $(x_\xi \to x$ в $f^{-1}(\omega)) \Leftrightarrow (f(x_\xi) \to f(x)$ в $\omega)$; аналогично $(\mathscr{F} \to x$ в $f^{-1}(\omega)) \Leftrightarrow (f(\mathscr{F}) \to f(x)$ в $\omega)$ для фильтра $\mathscr{F}$. $\lhd\rhd$

9.2.11. *Теорема об образе топологии.* *Пусть $f : (X,\ \tau) \to Y$. Положим $\Omega_0 := \{\omega \in \mathrm{T}(Y) :\ f : (X,\ \tau) \to (Y,\ \omega)$ непрерывно$\}$. Тогда топология $f(\tau) := \sup \Omega_0$ входит в Ω_0.*

$\lhd$ В силу 9.1.13 для $y \in Y$ выполнено

$$f(\tau)(y) = (\sup\nolimits_{\mathrm{T}(Y)} \Omega_0)(y) = (\sup\nolimits_{\mathscr{F}(Y)} \Omega_0)(y) = \sup\{\omega(y) :\ \omega \in \Omega_0\}.$$

На основании 9.2.3 (3)

$$\omega \in \Omega_0 \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow f(\tau(x)) \supset \omega(f(x))).$$

Сопоставляя приведенные формулы, видим, что $f(\tau) \in \Omega_0$. $\rhd$

9.2.12. Определение. Топологию $f(\tau)$ называют *образом топологии* τ при отображении f.

9.2.13. Замечание. Теорему 9.2.11 часто выражают словами: «образ топологии при данном отображении — это сильнейшая топология в области прибытия, в которой отображение непрерывно».

9.2.14. *Теорема.* *Пусть $(f_\xi : X \to (Y_\xi,\ \omega_\xi))_{\xi \in \Xi}$ — семейство отображений. Пусть, далее, $\tau := \sup_{\xi \in \Xi} f_\xi^{-1}(\omega_\xi)$. Тогда τ — слабейшая (= наименьшая) топология в X, в которой непрерывны все отображения f_ξ $(\xi \in \Xi)$.*

◁ Привлекая 9.2.8, имеем

$$(f_\xi : (X,\ \overline{\tau}) \to (Y_\xi,\ \omega_\xi) \text{ непрерывно}) \ \Leftrightarrow\ \overline{\tau} \geq f_\xi^{-1}(\omega_\xi).\ \triangleright$$

9.2.15. Теорема. *Пусть* $(f_\xi : (X_\xi,\ \tau_\xi) \to Y)_{\xi\in\Xi}$ *— семейство отображений. Пусть, далее,* $\omega := \inf_{\xi\in\Xi} f_\xi(\tau_\xi)$. *Тогда* ω *— сильнейшая (= наибольшая) топология в* Y, *в которой непрерывны все отображения* f_ξ $(\xi \in \Xi)$.

◁ Апеллируя к 9.2.11, заключаем:

$$(f_\xi : (X_\xi,\ \tau_\xi) \to (Y,\ \overline{\omega}) \text{ непрерывно}) \ \Leftrightarrow\ \overline{\omega} \leq f_\xi(\tau_\xi).\ \triangleright$$

9.2.16. Замечание. Утверждения 9.2.14 и 9.2.15 часто называют *теоремами о задании топологии* требованием непрерывности семейства отображений.

9.2.17. Примеры.

(1) Пусть $(X,\ \tau)$ — топологическое пространство и X_0 — подмножество в X. Обозначим $\iota : X_0 \to X$ вложение X_0 в X. Пусть $\tau_0 := \iota^{-1}(\tau)$. Топологию τ_0 называют *индуцированной* (τ в X_0), а пространство $(X_0,\ \tau_0)$ — *подпространством* $(X,\ \tau)$.

(2) Пусть $(X_\xi, \tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это семейство топологических пространств. Пусть, далее, $\mathfrak{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — произведение семейства множеств $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Положим $\tau := \sup_{\xi\in\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\tau_\xi)$, где $\mathrm{Pr}_\xi : \mathfrak{X} \to X_\xi$ — координатный проектор, $\mathrm{Pr}_\xi\, x = x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Топологию τ называют *топологией произведения*, или *произведением топологий* $(\tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$, или *тихоновской топологией*. Пространство $(\mathfrak{X},\ \tau)$ называют *тихоновским произведением* рассматриваемых топологических пространств. В частности, если $X_\xi := [0,\ 1]$ для всех $\xi \in \Xi$, то $\mathfrak{X} := [0,\ 1]^\Xi$ (с тихоновской топологией) называют *тихоновским кубом*. При $\Xi := \mathbb{N}$ говорят о *гильбертовом кирпиче*.

9.3. Типы топологических пространств

9.3.1. *Для топологического пространства эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *одноточечные множества замкнуты;*

(2) *пересечение всех окрестностей каждой точки пространства состоит только из этой точки;*

(3) *у каждой из любых двух точек пространства есть окрестность, не содержащая другой точки.*