$\lhd$ Привлекая 9.2.8, имеем

$$(f_\xi : (X,\ \overline{\tau}) \to (Y_\xi,\ \omega_\xi) \text{ непрерывно}) \ \Leftrightarrow\ \overline{\tau} \geq f_\xi^{-1}(\omega_\xi).\ \rhd$$

9.2.15. *Теорема.* *Пусть $(f_\xi : (X_\xi,\ \tau_\xi) \to Y)_{\xi\in\Xi}$ — семейство отображений. Пусть, далее, $\omega := \inf_{\xi\in\Xi} f_\xi(\tau_\xi)$. Тогда ω — сильнейшая (= наибольшая) топология в Y, в которой непрерывны все отображения f_ξ $(\xi \in \Xi)$.*

$\lhd$ Апеллируя к 9.2.11, заключаем:

$$(f_\xi : (X_\xi,\ \tau_\xi) \to (Y,\ \overline{\omega}) \text{ непрерывно}) \ \Leftrightarrow\ \overline{\omega} \leq f_\xi(\tau_\xi).\ \rhd$$

9.2.16. Замечание. Утверждения 9.2.14 и 9.2.15 часто называют *теоремами о задании топологии* требованием непрерывности семейства отображений.

9.2.17. Примеры.

(1) Пусть $(X,\ \tau)$ — топологическое пространство и X_0 — подмножество в X. Обозначим $\iota : X_0 \to X$ вложение X_0 в X. Пусть $\tau_0 := \iota^{-1}(\tau)$. Топологию τ_0 называют *индуцированной* (τ в X_0), а пространство $(X_0,\ \tau_0)$ — *подпространством* $(X,\ \tau)$.

(2) Пусть $(X_\xi, \tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это семейство топологических пространств. Пусть, далее, $\mathfrak{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — произведение семейства множеств $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Положим $\tau := \sup_{\xi\in\Xi} \operatorname{Pr}_\xi^{-1}(\tau_\xi)$, где $\operatorname{Pr}_\xi : \mathfrak{X} \to X_\xi$ — координатный проектор, $\operatorname{Pr}_\xi x = x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Топологию τ называют *топологией произведения*, или *произведением топологий* $(\tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$, или *тихоновской топологией*. Пространство $(\mathfrak{X},\ \tau)$ называют *тихоновским произведением* рассматриваемых топологических пространств. В частности, если $X_\xi := [0,\ 1]$ для всех $\xi \in \Xi$, то $\mathfrak{X} := [0,\ 1]^\Xi$ (с тихоновской топологией) называют *тихоновским кубом*. При $\Xi := \mathbb{N}$ говорят о *гильбертовом кирпиче*.

9.3. Типы топологических пространств

9.3.1. *Для топологического пространства эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *одноточечные множества замкнуты;*

(2) *пересечение всех окрестностей каждой точки пространства состоит только из этой точки;*

(3) *у каждой из любых двух точек пространства есть окрестность, не содержащая другой точки.*

$\lhd$ Для доказательства достаточно заметить, что

$$y \in \mathrm{cl}\{x\} \Leftrightarrow (\forall V \in \tau(y)) \quad x \in V \Leftrightarrow x \in \cap\{V : \ V \in \tau(y)\},$$

где x, y — точки топологического пространства $(X, \ \tau)$. $\rhd$

9.3.2. Определение. Топологическое пространство, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 9.3.1 (1)–9.3.1 (3), называют *отделимым* или *T_1-пространством.* Топологию T_1-пространства называют *отделимой* (реже — *T_1-топологией*, еще реже — *достижимой* топологией).

9.3.3. Замечание. Часто образно говорят: «T_1-пространство — это пространство с замкнутыми точками».

9.3.4. *Для топологического пространства эквивалентны следующие утверждения*:

(1) *каждый фильтр имеет не более одного предела*;

(2) *пересечение всех замкнутых окрестностей произвольной точки пространства состоит только из этой точки*;

(3) *у любых двух точек пространства имеются непересекающиеся окрестности.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Если $y \in \cap_{U\in\tau(x)} \mathrm{cl}\, U$, то для всякого $V \in \tau(y)$ будет, что $U \cap V \neq \varnothing$, как только $U \in \tau(x)$. Таким образом, есть точная верхняя граница $\mathscr{F} := \tau(x) \vee \tau(y)$. Несомненно, $\mathscr{F} \to x$ и $\mathscr{F} \to y$. По условию имеем $x = y$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть x, $y \in X$, $x \neq y$ (если таких точек нет, то либо $X = \varnothing$, либо X состоит из одной точки и доказывать ничего не надо). Найдется окрестность $U \in \tau(x)$ такая, что $U = \mathrm{cl}\, U$ и $y \neq U$. Значит, дополнение V множества U до X открыто. Помимо этого, $U \cap V = \varnothing$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X. Если $\mathscr{F} \to x$ и $\mathscr{F} \to y$, то $\mathscr{F} \supset \tau(x)$ и $\mathscr{F} \supset \tau(y)$. Стало быть, для $U \in \tau(x)$ и $V \in \tau(y)$ выполнено $U \cap V \neq \varnothing$. Последнее означает, что $x = y$. $\rhd$

9.3.5. Определение. Топологическое пространство, удовлетворяющее одному (а потому и любому) из эквивалентных условий 9.3.4 (1)–9.3.4 (3), называют *хаусдорфовым* или *T_2-пространством.* Естественный смысл вкладывают в термин «хаусдорфова топология».

9.3.6. Замечание. Часто образно говорят: «T_2-пространство — это пространство, в котором предел единствен».

9.3.7. Определение. Пусть U, V — множества в топологическом пространстве. Говорят, что V — *окрестность* U, если $\operatorname{int} V \supset U$.

9.3.8. *Для топологического пространства эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *пересечение всех замкнутых окрестностей произвольного замкнутого множества состоит только из элементов этого множества;*

(2) *фильтр окрестностей произвольной точки имеет базис, состоящий из замкнутых множеств;*

(3) *у любой точки и у любого замкнутого множества, не содержащего этой точки, имеются непересекающиеся окрестности.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Если $x \in X$ и $U \in \tau(x)$, то $V := X \setminus \operatorname{int} U$ замкнуто и $x \notin V$. По условию найдется множество $F \in \mathrm{Cl}(\tau)$, для которого $x \notin F$ и $\operatorname{int} F \supset V$. Положим $G := X \setminus F$. Ясно, что $G \in \tau(x)$. При этом $G \subset X \setminus \operatorname{int} F = \mathrm{cl}(X \setminus \operatorname{int} F) \subset X \setminus V \subset \operatorname{int} U \subset U$. Следовательно, $\mathrm{cl}\, G \subset U$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Если $x \in X$ и $F \in \mathrm{Cl}(\tau)$, причем $x \notin F$, то $X \setminus F \in \tau(x)$. Стало быть, имеется окрестность $U = \mathrm{cl}\, U \in \tau(x)$, содержащаяся в $X \setminus F$. Таким образом, $X \setminus U$ — окрестность F, не пересекающаяся с U.

(3) $\Rightarrow$ (1): Если $F \in \mathrm{Cl}(\tau)$ и $\operatorname{int} G \supset F \Rightarrow y \in \mathrm{cl}\, G$, то для каждого $U \in \tau(y)$ и всякой окрестности G множества F выполнено $U \cap G \neq \varnothing$. Последнее означает, что $y \in F$. $\triangleright$

9.3.9. Определение. Топологическое пространство, удовлетворяющее одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 9.3.8 (1)–9.3.8 (3), называют *T_3-пространством.* Отделимое T_3-пространство называют *регулярным.*

9.3.10. ***Малая лемма Урысона.*** *Для топологического пространства эквивалентны утверждения:*

(1) *фильтр окрестностей каждого непустого замкнутого множества имеет базис, состоящий из замкнутых множеств;*

(2) *у произвольных двух непересекающихся замкнутых множеств есть непересекающиеся окрестности.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть F_1, F_2 — замкнутые множества пространства X, причем $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Пусть $G := X \setminus F_1$. Очевидно, G открыто и $G \supset F_2$. Если $F_2 = \varnothing$, то доказывать ничего не надо. Значит, можно считать, что $F_2 \neq \varnothing$. Тогда найдется замкнутое множество V_2 такое, что $G \supset V_2 \supset \operatorname{int} V_2 \supset F_2$. Положим $V_1 := X \setminus V_2$. Ясно, что V_1 открыто, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. При этом $V_1 \supset X \setminus G = X \setminus (X \setminus F_1) = F_1$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть $F = \operatorname{cl} F$, $G = \operatorname{int} G$ и $G \supset F$. Положим $F_1 := X \setminus G$. Тогда $F_1 = \operatorname{cl} F_1$ и, стало быть, имеются открытые множества U и U_1, для которых $U \cap U_1 = \varnothing$, причем $F \subset U$ и $F_1 \subset U_1$. Наконец, $\operatorname{cl} U \subset X \setminus U_1 \subset X \setminus F_1 = G$. $\rhd$

9.3.11. Определение. Топологическое пространство, удовлетворяющее одному (а тогда и другому) из эквивалентных условий 9.3.10 (1), 9.3.10 (2), называют *T_4-пространством.* Отделимое T_4-пространство называют *нормальным.*

9.3.12. *Лемма о непрерывности функции, заданной лебеговыми множествами.* *Пусть множество T плотно в $\overline{\mathbb{R}}$ и $t \mapsto U_t$ $(t \in T)$ — семейство подмножеств топологического пространства X. Существует, и притом единственная, непрерывная функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \le t\} \quad (t \in T)$$

в том и только в том случае, если

$$t,\ s \in T,\ t < s \Rightarrow \operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_s.$$

$\lhd$ $\Rightarrow$: При $t < s$ ввиду замкнутости $\{f \le t\}$ и открытости $\{f < s\}$ справедливы включения

$$\operatorname{cl} U_t \subset \{f \le t\} \subset \{f < s\} \subset \operatorname{int} U_s.$$

$\Leftarrow$: Так как $U_t \subset \operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_s \subset U_s$ при $t < s$, то семейство $t \mapsto U_t$ $(t \in T)$ возрастает. Поэтому существование f следует из 3.8.2 (а единственность — из 3.8.4). Рассмотрим семейства $t \mapsto V_t := \operatorname{cl} U_t$ и $t \mapsto W_t := \operatorname{int} U_t$. Эти семейства возрастают. Значит, вновь применяя 3.8.2, найдем функции $g,\ h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такие, что для всех $t \in T$ выполнено

$$\{g < t\} \subset V_t \subset \{g \le t\}, \quad \{h < t\} \subset W_t \subset \{h \le t\}.$$

Если $t,\ s \in T,\ t < s$, то ввиду 3.8.3

$$W_t = \operatorname{int} U_t \subset U_t \subset U_s \Rightarrow f \le h;$$
$$V_t = \operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_s = W_s \Rightarrow h \le g;$$
$$U_t \subset U_s \subset \operatorname{cl} U_s = V_s \Rightarrow g \le f.$$

Окончательно $f = g = h$. Учитывая 3.8.4 и 9.1.5, для $t \in \overline{\mathbb{R}}$ имеем

$$\{f < t\} = \{h < t\} = \cup\{W_s :\ s < t,\ s \in T\} \in \operatorname{Op}(\tau_X);$$
$$\{f \le t\} = \{g \le t\} = \cap\{V_s :\ t < s,\ s \in T\} \in \operatorname{Cl}(\tau_X).$$

Указанные вхождения очевидно обеспечивают непрерывность f. ▷

9.3.13. *Большая лемма Урысона.* *Пусть X — некоторое T_4-пространство. Пусть, далее, F — замкнутое множество в X и G — его окрестность. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0,\ 1]$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in F$ и $f(x) = 1$ при $x \notin G$.*

◁ Положим $U_t := \varnothing$ при $t < 0$ и $U_t := X$ при $t > 1$. Следует определить U_t для точек из множества $\overline{T}$ «двоично-рациональных точек отрезка $[0,\ 1]$», т. е. $\overline{T} := \cup_{n\in\mathbb{N}} T_n$, где $T_n := \{k2^{-n+1} : k := 0,\ 1, \dots, 2^{n-1}\}$, так, чтобы для семейства $t \mapsto U_t$ $(t \in T := \overline{T} \cup (\mathbb{R} \setminus [0,\ 1]))$ были выполнены условия 9.3.12. Соответствующее построение проведем по индукции.

Если $t \in T_1$, т. е. $t \in \{0,\ 1\}$, то полагаем $U_0 := F$, $U_1 := G$. Допустим теперь, что для $t \in T_n$ при $n \ge 1$ множество U_t построено, причем $\operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_s$, как только $t,\ s \in T_n$ и $t < s$. Возьмем $t \in T_{n+1}$ и найдем ближайшие к t точки в T_n, т. е.

$$t_l := \sup\{s \in T_n :\ s \le t\};$$
$$t_r := \inf\{s \in T_n :\ t \le s\}.$$

Если $t = t_l$ или $t = t_r$, то U_t уже есть. Если же $t \ne t_l$ и $t \ne t_r$, то $t_l < t < t_r$ и по предположению $\operatorname{cl} U_{t_l} \subset \operatorname{int} U_{t_r}$. В силу 9.3.11 имеется замкнутое множество U_t такое, что

$$\operatorname{cl} U_{t_l} \subset \operatorname{int} U_t \subset U_t = \operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_{t_r}.$$

Осталось показать, что возникающее семейство удовлетворяет требуемым условиям.

Итак, пусть $t,\ s \in T_{n+1}$, причем $t < s$. Если $t_r = s_l$, то при $s > s_l$ по построению
$$\operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{cl} U_{t_r} = \operatorname{cl} U_{s_l} \subset \operatorname{int} U_s.$$
Аналогично при $t < t_r = s_l$ выполнено
$$\operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_{t_r} = \inf U_{s_l} \subset \operatorname{int} U_s.$$
Если же $t_r < s_l$, то, учитывая сделанное допущение, выводим
$$\operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{cl} U_{t_r} \subset \operatorname{int} U_{s_l} \subset \operatorname{int} U_s,$$
что и нужно. $\rhd$

9.3.14. Теорема Урысона. *Топологическое пространство X является T_4-пространством в том и только в том случае, если каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества F_1, F_2 в X, найдется непрерывная функция $f : X \to [0,\ 1]$ такая, что $f(x) = 0$ для $x \in F_1$ и $f(x) = 1$ для $x \in F_2$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Следует применить 9.3.13 при $F := F_1$ и $G := X \setminus F_2$.

$\Leftarrow$: Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ и F_1, F_2 замкнуты, то множества $G_1 := \{f < 1/2\}$ и $G_2 := \{f > 1/2\}$ для соответствующей функции f открыты и не пересекаются; $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$. $\rhd$

9.3.15. Определение. Топологическое пространство X *называют $T_{3\frac{1}{2}}$-пространством*, если для произвольной точки $x \in X$ и замкнутого множества F, не содержащего x, имеется непрерывная функция $f : X \to [0,\ 1]$ такая, что $f(x) = 1$ и $y \in F \Rightarrow f(y) = 0$. Отделимое $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство называют *тихоновским* или *вполне регулярным*.

9.3.16. *Нормальное пространство является тихоновским.*

$\lhd$ Следствие 9.3.1 и 9.3.14. $\rhd$

9.4. Компактность

9.4.1. *Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в топологическом пространстве и $\operatorname{cl} \mathscr{B} := \cap\{\operatorname{cl} B :\ B \in \mathscr{B}\}$ — множество его точек прикосновения. Тогда*

(1) $\operatorname{cl} \mathscr{B} = \operatorname{cl} \operatorname{fil} \mathscr{B}$;

(2) $\mathscr{B} \to x \Rightarrow x \in \operatorname{cl} \mathscr{B}$;

(3) ($\mathscr{B}$ — *ультрафильтр*, $x \in \operatorname{cl} \mathscr{B}$) $\Rightarrow \mathscr{B} \to x$.