Итак, пусть $t,\ s \in T_{n+1}$, причем $t < s$. Если $t_r = s_l$, то при $s > s_l$ по построению

$$\operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{cl} U_{t_r} = \operatorname{cl} U_{s_l} \subset \operatorname{int} U_s.$$

Аналогично при $t < t_r = s_l$ выполнено

$$\operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{int} U_{t_r} = \inf U_{s_l} \subset \operatorname{int} U_s.$$

Если же $t_r < s_l$, то, учитывая сделанное допущение, выводим

$$\operatorname{cl} U_t \subset \operatorname{cl} U_{t_r} \subset \operatorname{int} U_{s_l} \subset \operatorname{int} U_s,$$

что и нужно. $\triangleright$

9.3.14. Теорема Урысона. *Топологическое пространство X является T_4-пространством в том и только в том случае, если каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества F_1, F_2 в X, найдется непрерывная функция $f : X \to [0,\ 1]$ такая, что $f(x) = 0$ для $x \in F_1$ и $f(x) = 1$ для $x \in F_2$.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Следует применить 9.3.13 при $F := F_1$ и $G := X \setminus F_2$.

$\Leftarrow$: Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ и F_1, F_2 замкнуты, то множества $G_1 := \{f < 1/2\}$ и $G_2 := \{f > 1/2\}$ для соответствующей функции f открыты и не пересекаются; $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$. $\triangleright$

9.3.15. Определение. Топологическое пространство X *называют $T_{3\frac{1}{2}}$-пространством*, если для произвольной точки $x \in X$ и замкнутого множества F, не содержащего x, имеется непрерывная функция $f : X \to [0,\ 1]$ такая, что $f(x) = 1$ и $y \in F \Rightarrow f(y) = 0$. Отделимое $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство называют *тихоновским* или *вполне регулярным*.

9.3.16. *Нормальное пространство является тихоновским.*

$\triangleleft$ Следствие 9.3.1 и 9.3.14. $\triangleright$

9.4. Компактность

9.4.1. *Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в топологическом пространстве и $\operatorname{cl} \mathscr{B} := \cap\{\operatorname{cl} B :\ B \in \mathscr{B}\}$ — множество его точек прикосновения. Тогда*

(1) $\operatorname{cl} \mathscr{B} = \operatorname{cl} \operatorname{fil} \mathscr{B}$;
(2) $\mathscr{B} \to x \Rightarrow x \in \operatorname{cl} \mathscr{B}$;
(3) $(\mathscr{B}$ — *ультрафильтр*, $x \in \operatorname{cl} \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B} \to x$.

◁ Следует проверить только (3), так как справедливость (1) и (2) ясна. Для $U \in \tau(x)$ и $B \in \mathscr{B}$ выполнено $U \cap B \neq \varnothing$. Иначе говоря, есть фильтр $\mathscr{F} := \tau(x) \vee \mathscr{B}$. Ясно, что $\mathscr{F} \to x$. Помимо этого, $\mathscr{F} = \mathscr{B}$, ибо $\mathscr{B}$ — ультрафильтр. ▷

9.4.2. Определение. Множество принято называть *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие (ср. 4.4.1).

9.4.3. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство и C — множество в X. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество C компактно;*

(2) *если базис фильтра $\mathscr{B}$ не имеет в C точек прикосновения, то найдется $B \in \mathscr{B}$, для которого $B \cap C = \varnothing$;*

(3) *каждый базис фильтра, содержащий C, имеет в C точку прикосновения;*

(4) *каждый ультрафильтр, содержащий C, имеет в C предел.*

◁ (1) ⇒ (2): Раз $\operatorname{cl}\mathscr{B} \cap C = \varnothing$, то $C \subset X \setminus \operatorname{cl}\mathscr{B}$. Итак,

$$C \subset X \setminus \cap\{\operatorname{cl} B : \ B \in \mathscr{B}\} = \cup\{X \setminus \operatorname{cl} B : \ B \in \mathscr{B}\}.$$

Значит, можно выделить конечное множество $\mathscr{B}_0$ в $\mathscr{B}$, для которого

$$C \subset \cup\{X \setminus \operatorname{cl} B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\} = X \setminus \cap\{\operatorname{cl} B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\}.$$

Пусть $B \in \mathscr{B}$ таково, что $B \subset \cap\{B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\} \subset \cap\{\operatorname{cl} B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\}$. Тогда

$$C \cap B \subset C \cap (\cap\{\operatorname{cl} B_0 : \ B_0 \in \mathscr{B}_0\}) = \varnothing.$$

(2) ⇒ (3): Если $C = \varnothing$, то доказывать ничего не надо. Если же $C \neq \varnothing$, то для $B \in \mathscr{B}$ по условию $B \cap C \neq \varnothing$, ибо $C \in \mathscr{B}$. Таким образом, $\operatorname{cl}\mathscr{B} \cap C \neq \varnothing$.

(3) ⇒ (4): Следует привлечь 9.4.1.

(4) ⇒ (1): Можно считать, что $C \neq \varnothing$ (иначе нечего доказывать). Допустим, что C некомпактно. Тогда найдется множество $\mathscr{E}$ открытых множеств такое, что $C \subset \cup\{G : \ G \in \mathscr{E}\}$, и в то же время

для любого конечного подмножества $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ не верно, что $C \subset \cup\{G : G \in \mathscr{E}_0\}$. Положим

$$\mathscr{B} := \left\{ \bigcap_{G \in \mathscr{E}_0} X \setminus G : \ \mathscr{E}_0 \text{ — конечное подмножество } \mathscr{E} \right\}.$$

Ясно, что $\mathscr{B}$ — базис фильтра. Помимо этого,

$$\begin{gathered}\operatorname{cl} \mathscr{B} = \cap\{\operatorname{cl} B : \ B \in \mathscr{B}\} = \cap\{X \setminus G : \ G \in \mathscr{E}\} = \\ = X \setminus \cup\{G : \ G \in \mathscr{E}\} \subset X \setminus C.\end{gathered}$$

Пусть теперь $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{B}$ (его существование гарантировано 1.3.10). Так как по допущению каждое множество из $\mathscr{B}$ содержит некоторые точки из C, можно обеспечить, что $C \in \mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{F} \to x$ для некоторого $x \in C$ и, стало быть, по 9.4.1 (2), $\operatorname{cl} \mathscr{F} \cap C \neq \varnothing$. В то же время $\operatorname{cl} \mathscr{F} \subset \operatorname{cl} \mathscr{B}$. Получили противоречие. $\triangleright$

9.4.4. Замечание. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (4) в теореме 9.4.3 называют *критерием Бурбаки* и выражают при $X = C$ словами: «пространство компактно в том и только в том случае, если каждый ультрафильтр в нем сходится» (ср. 4.4.7).

Ультрасетью называют сеть, фильтр хвостов которой является ультрафильтром. Критерий Бурбаки можно высказать так: «компактность равносильна сходимости ультрасетей». На языке сетей можно получить и иные полезные признаки компактности. Например, «пространство компактно в том и только в том случае, если любая сеть его имеет сходящуюся подсеть».

9.4.5. ***Теорема Вейерштрасса.*** *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен* (ср. 4.4.5). $\triangleleft\triangleright$

9.4.6. *Пусть X_0 — подпространство топологического пространства X и C — подмножество X_0. Тогда C компактно в X_0 в том и только в том случае, если C компактно в X.*

$\triangleleft$ $\Rightarrow$: Следует из 9.4.5 и 9.2.17 (1).

$\Leftarrow$: Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра в X_0. Пусть, далее, $V := \operatorname{cl}_{X_0} \mathscr{B}$ — множество точек прикосновения $\mathscr{B}$, найденное в X_0. Допустим, что $V \cap C = \varnothing$. Так как $\mathscr{B}$ — это базис фильтра и в X, то имеет смысл говорить о множестве точек прикосновения $W := \mathrm{cl}_X \mathscr{B}$, найденном в X. Ясно, что $V = W \cap X_0$ и, значит, $W \cap C = \varnothing$. Из-за компактности C в X на основании 9.4.3 можно найти $B \in \mathscr{B}$, для которого $B \cap C = \varnothing$. Вновь привлекая 9.4.3, видим, что C компактно в X_0. $\triangleright$

9.4.7. Замечание. Предложение 9.4.6 часто выражают словами: «компактность — это абсолютное понятие», т. е. свойство множества быть компактным зависит только от индуцированной в него топологии, а не от объемлющего пространства. В этой связи обычно ограничиваются рассмотрением *компактных пространств*, т. е. множеств, «компактных в себе».

9.4.8. *Теорема Тихонова.* *Тихоновское произведение компактных пространств компактно.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathfrak{X} := \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ — произведение рассматриваемого семейства. Если хотя бы одно из X_ξ пусто, то $\mathfrak{X} = \varnothing$ и доказывать нечего. Пусть $\mathfrak{X} \neq \varnothing$ и $\mathscr{F}$ — ультрафильтр в $\mathfrak{X}$. По 1.3.12 при каждом $\xi \in \Xi$ для координатного проектора $\mathrm{Pr}_\xi : \mathfrak{X} \to X_\xi$ выполнено, что $\mathrm{Pr}_\xi(\mathscr{F})$ — ультрафильтр в X_ξ. Значит, в силу 9.4.3 найдется $x_\xi \in X_\xi$, для которого $\mathrm{Pr}_\xi(\mathscr{F}) \to x_\xi$. Пусть $x : \xi \mapsto x_\xi$. Понятно, что $\mathscr{F} \to x$ (ср. 9.2.10). Еще раз апеллируя к 9.4.3, выводим, что $\mathfrak{X}$ компактно. $\triangleright$

9.4.9. *Замкнутое подмножества компактного пространства компактно.*

$\triangleleft$ Пусть X компактно и $C \in \mathrm{Cl}(X)$. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — ультрафильтр в X и $C \in \mathscr{F}$. По теореме 9.4.3 в X имеется предел: $\mathscr{F} \to x$. По теореме Биркгофа 9.2.2, $x \in \mathrm{cl}\, C = C$. Вновь привлекая 9.4.3, заключаем, что C компактно. $\triangleright$

9.4.10. *Компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства замкнуто.*

$\triangleleft$ Пусть C компактно в хаусдорфовом X. Если $C = \varnothing$, то доказывать нечего. Пусть $C \neq \varnothing$ и $x \in \mathrm{cl}\, C$. В силу 9.2.2 найдется фильтр $\mathscr{F}_0$ такой, что $C \in \mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_0 \to x$. Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{F}_0$. Тогда $\mathscr{F} \to x$ и $C \in \mathscr{F}$. На основании 9.4.3 у $\mathscr{F}$ есть предел в C. Но по 9.3.4 этот предел единствен. Значит, $x \in C$. $\triangleright$

9.4.11. *Пусть $f : (X,\ \tau) \to (Y,\ \omega)$ — непрерывное взаимно однозначное отображение, причем $f(X) = Y$. Если τ — компактная топология, а ω — хаусдорфова топология, то f — гомеоморфизм.*

$\lhd$ Следует установить, что f^{-1} непрерывно. Для этого необходимо убедиться, что $F \in \mathrm{Cl}(\tau) \Rightarrow f(F) \in \mathrm{Cl}(\omega)$. Возьмем $F \in \mathrm{Cl}(\tau)$. Тогда F компактно в силу 9.4.9. Применяя последовательно 9.4.5 и 9.4.10, видим, что $f(F)$ замкнуто. $\rhd$

9.4.12. *Пусть τ_1 и τ_2 — две топологии на одном множестве X. Если пространство $(X,\ \tau_1)$ компактно, а $(X,\ \tau_2)$ хаусдорфово и $\tau_1 \geq \tau_2$, то $\tau_1 = \tau_2$.* $\lhd\rhd$

9.4.13. Замечание. Утверждение 9.4.12 часто выражают словами «компактная топология минимальна».

9.4.14. ***Теорема.*** *Хаусдорфово компактное пространство нормально.*

$\lhd$ Пусть X — рассматриваемое пространство и $\mathscr{B}$ — какой-нибудь базис фильтра в X. Пусть, далее, U — окрестность $\mathrm{cl}\,\mathscr{B}$. Ясно, что $X \setminus \mathrm{int}\,U$ компактно (см. 9.4.9), причем $\mathrm{cl}\,\mathscr{B} \cap (X \setminus \mathrm{int}\,U) = \varnothing$. По теореме 9.4.3 найдется $B \in \mathscr{B}$ такое, что $B \cap (X \setminus \mathrm{int}\,U) = \varnothing$, т. е. $B \subset U$. Полагая, если нужно, $\mathscr{B} := \{\mathrm{cl}\,B :\ B \in \mathscr{B}\}$, можно утверждать, что $\mathrm{cl}\,B \subset U$.

Пусть для начала $x \in X$ и $\mathscr{B} := \tau(x)$. В силу 9.3.4, $\mathrm{cl}\,\mathscr{B} = \{x\}$ и, значит, фильтр $\tau(x)$ имеет базис, состоящий из замкнутых множеств. Стало быть, X регулярно.

Пусть теперь F — непустое замкнутое множество в X. В качестве $\mathscr{B}$ возьмем фильтр окрестностей F. По 9.3.8, $\mathrm{cl}\,\mathscr{B} = F$, и по уже установленному $\mathscr{B}$ имеет базис, состоящий из замкнутых множеств. В соответствии с 9.3.9, X — нормальное пространство. $\rhd$

9.4.15. ***Следствие.*** *С точностью до гомеоморфизма хаусдорфовы компактные пространства суть замкнутые подмножества тихоновских кубов.*

$\lhd$ То, что замкнутое подмножество тихоновского куба компактно, следует из 9.4.8 и 9.4.9. Хаусдорфовость куба, а потому и его подпространств бесспорна.

Пусть X — некоторое компактное хаусдорфово пространство. Пусть еще Q — совокупность непрерывных функций из X в $[0,\ 1]$. Определим отображение $\Psi : X \to [0,\ 1]^Q$ правилом $\Psi(x)(f) := f(x)$, где $x \in X$ и $f \in Q$. Из 9.4.14 и 9.3.14 выводим, что Ψ взаимно однозначно отображает X на $\Psi(X)$. Помимо этого, Ψ непрерывно. Осталось применить 9.4.11. $\rhd$

9.4.16. Замечание. Следствие 9.4.15 представляет собой часть более общего утверждения. Именно, тихоновские пространства суть (с точностью до гомеоморфизма) подпространства тихоновских кубов. $\lhd\rhd$

9.4.17. Замечание. Хаусдорфовы компактные пространства, как правило, называют более коротко — *компактами* (ср. 4.5 и 4.6).

9.4.18. ***Лемма Дьедонне.*** *Пусть F — это замкнутое подмножество, а $G_1, \dots, G_n$ — открытые подмножества нормального топологического пространства, причем $F \subset G_1 \cup \dots \cup G_n$. Найдутся замкнутые множества $F_1, \dots, F_n$ такие, что $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$ и $F_k \subset G_k$ $(k := 1, \dots, n)$.*

$\lhd$ Достаточно рассмотреть случай $n := 2$. При $k := 1, 2$ множество $U_k := F \setminus G_k$ замкнуто и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. С учетом 9.3.10 имеются открытые V_1 и V_2, для которых $U_1 \subset V_1$, $U_2 \subset V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Положим $F_k := F \setminus V_k$. Ясно, что F_k замкнуто и $F_k \subset F \setminus U_k = F \setminus (F \setminus G_k) \subset G_k$ для $k := 1, 2$. При этом $F_1 \cup F_2 = F \setminus (V_1 \cup V_2) = F$. $\rhd$

9.4.19. Замечание. По 9.3.14 заключаем, что в условиях 9.4.18 для рассматриваемого пространства X найдутся непрерывные функции $h_1, \dots, h_n : X \to [0,\ 1]$ такие, что $h_k|_{G'_k} = 0$ и $\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$ для точек x из некоторой окрестности F. (Как обычно, $G'_k := X \setminus G_k$.)

9.4.20. Определение. Топологию, в которой каждая точка обладает компактной окрестностью, называют *локально компактной. Локально компактным пространством* называют множество, снабженное локально компактной хаусдорфовой топологией.

9.4.21. *Топологическое пространство локально компактно в том и только в том случае, если оно гомеоморфно проколотому компакту (= компакту с выколотой точкой), т. е. дополнению одноточечного подмножества компакта.*

$\lhd$ $\Leftarrow$: С учетом теоремы Вейерштрасса 9.4.5 достаточно заметить, что каждая точка проколотого компакта обладает замкнутой (в силу регулярности компакта) окрестностью. Осталось привлечь утверждения 9.4.9 и 9.4.6.

$\Rightarrow$: Поместим исходное пространство X в $X^{\cdot} := X \cup \{\infty\}$, присоединив к X взятую со стороны точку ∞. Базис окрестностей ∞ составим из дополнений в $X^{\cdot}$ компактных подмножеств в X. Окрестностями точки из X в $X^{\cdot}$ объявим надмножества ее окрестностей в X. Если $\mathfrak{A}$ — ультрафильтр в $X^{\cdot}$ и K — компакт в X, то $\mathfrak{A}$ сходится к точке из K, как только $K \in \mathfrak{A}$. Если же в $\mathfrak{A}$ лежит дополнение любого компакта $K \subset X$, то $\mathfrak{A}$ сходится к ∞. $\triangleright$

9.4.22. Замечание. Если локально компактное пространство X не компактно, то пространство $X^{\cdot}$, фигурирующее в 9.4.20, называют *одноточечной* или *александровской компактификацией* X.

9.5. Равномерные и мультиметрические пространства

9.5.1. Определение. Пусть X — непустое множество и $\mathscr{U}_X$ — фильтр в X^2. Фильтр $\mathscr{U}_X$ называют *равномерностью* в X, если

(1) $\mathscr{U}_X \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $U \in \mathscr{U}_X \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}_X$;

(3) $(\forall U \in \mathscr{U}_X)(\exists V \in \mathscr{U}_X)\ V \circ V \subset U$.

Равномерностью пустого множества X называют $\mathscr{U}_X := \{\varnothing\}$. Пару $(X,\ \mathscr{U}_X)$ (а часто и множество X) называют *равномерным пространством*.

9.5.2. *Для равномерного пространства $(X,\ \mathscr{U}_X)$ положим*

$$x \in X \Rightarrow \tau(x) := \{U(x) :\ U \in \mathscr{U}_X\}.$$

Отображение $\tau : x \mapsto \tau(x)$ — топология на X.

$\triangleleft$ То, что τ — это предтопология, ясно. Если $W \in \tau(x)$, то $W = U(x)$ для некоторого $U \in \mathscr{U}_X$. Выберем $V \in \mathscr{U}_X$ так, чтобы $V \circ V \subset U$. Если $y \in V(x)$, то $V(y) \subset V(V(x)) = V \circ V(x) \subset U(x) \subset W$. Иными словами, множество W является окрестностью y для всякого $y \in V(x)$. Следовательно, множество $V(x)$ лежит во внутренности $\operatorname{int} W$. Значит, $\operatorname{int} W$ — окрестность x. Осталось привлечь 9.1.6. $\triangleright$

9.5.3. Определение. Топологию τ, фигурирующую в 9.5.2, называют топологией равномерного пространства $(X,\ \mathscr{U}_X)$ или *равномерной топологией* и обозначают $\tau(\mathscr{U}_X)$, τ_X и т. п.