$\Rightarrow$: Поместим исходное пространство $X$ в $X^{\cdot} := X \cup \{\infty\}$, присоединив к $X$ взятую со стороны точку $\infty$. Базис окрестностей $\infty$ составим из дополнений в $X^{\cdot}$ компактных подмножеств в $X$. Окрестностями точки из $X$ в $X^{\cdot}$ объявим надмножества ее окрестностей в $X$. Если $\mathfrak{A}$ — ультрафильтр в $X^{\cdot}$ и $K$ — компакт в $X$, то $\mathfrak{A}$ сходится к точке из $K$, как только $K \in \mathfrak{A}$. Если же в $\mathfrak{A}$ лежит дополнение любого компакта $K \subset X$, то $\mathfrak{A}$ сходится к $\infty$. $\triangleright$

**9.4.22.** Замечание. Если локально компактное пространство $X$ не компактно, то пространство $X^{\cdot}$, фигурирующее в 9.4.20, называют *одноточечной* или *александровской компактификацией* $X$.

## 9.5. Равномерные и мультиметрические пространства

**9.5.1.** Определение. Пусть $X$ — непустое множество и $\mathscr{U}_X$ — фильтр в $X^2$. Фильтр $\mathscr{U}_X$ называют *равномерностью* в $X$, если

**(1)** $\mathscr{U}_X \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

**(2)** $U \in \mathscr{U}_X \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}_X$;

**(3)** $(\forall U \in \mathscr{U}_X)(\exists V \in \mathscr{U}_X)\ V \circ V \subset U$.

Равномерностью пустого множества $X$ называют $\mathscr{U}_X := \{\varnothing\}$. Пару $(X,\ \mathscr{U}_X)$ (а часто и множество $X$) называют *равномерным пространством.*

**9.5.2.** *Для равномерного пространства $(X,\ \mathscr{U}_X)$ положим*

$$x \in X \Rightarrow \tau(x) := \{U(x) :\ U \in \mathscr{U}_X\}.$$

*Отображение $\tau : x \mapsto \tau(x)$ — топология на $X$.*

$\triangleleft$ То, что $\tau$ — это предтопология, ясно. Если $W \in \tau(x)$, то $W = U(x)$ для некоторого $U \in \mathscr{U}_X$. Выберем $V \in \mathscr{U}_X$ так, чтобы $V \circ V \subset U$. Если $y \in V(x)$, то $V(y) \subset V(V(x)) = V \circ V(x) \subset U(x) \subset W$. Иными словами, множество $W$ является окрестностью $y$ для всякого $y \in V(x)$. Следовательно, множество $V(x)$ лежит во внутренности $\operatorname{int} W$. Значит, $\operatorname{int} W$ — окрестность $x$. Осталось привлечь 9.1.6. $\triangleright$

**9.5.3.** Определение. Топологию $\tau$, фигурирующую в 9.5.2, называют топологией равномерного пространства $(X,\ \mathscr{U}_X)$ или *равномерной топологией* и обозначают $\tau(\mathscr{U}_X)$, $\tau_X$ и т. п.

**9.5.4.** Определение. Топологическое пространство $(X,\ \tau)$ называют ***равномеризуемым***, если существует равномерность $\mathscr{U}$ в $X$ такая, что $\tau$ совпадает с равномерной топологией $\tau(\mathscr{U})$.

**9.5.5.** Примеры.

**(1)** Метрические пространства (со своими топологиями) равномеризуемы (своими равномерностями).

**(2)** Мультинормированные пространства (со своими топологиями) равномеризуемы (своими равномерностями).

**(3)** Пусть $f : X \to (Y,\ \mathscr{U}_Y)$ и $f^{-1}(\mathscr{U}_Y) := f^{\times -1}(\mathscr{U}_Y)$, где, как обычно, $f^{\times}(x_1,\ x_2) := (f(x_1),\ f(x_2))$ для $(x_1,\ x_2) \in X^2$. Ясно, что $f^{-1}(\mathscr{U}_Y)$ — равномерность в $X$. При этом

$$\tau(f^{-1}(\mathscr{U}_Y)) = f^{-1}(\tau(\mathscr{U}_Y)).$$

Равномерность $f^{-1}(\mathscr{U}_Y)$ называют ***прообразом равномерности*** $\mathscr{U}_Y$ ***при отображении*** $f$. Таким образом, прообраз равномерной топологии равномеризуем.

**(4)** Пусть $(X_\xi, \mathscr{U}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — это некоторое семейство равномерных пространств. Пусть, далее, $\mathfrak{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — произведение этого семейства. Положим $\mathscr{U}_{\mathfrak{X}} := \sup_{\xi\in\Xi} \Pr_\xi^{-1}(\mathscr{U}_\xi)$. Равномерность $\mathscr{U}_{\mathfrak{X}}$ называют ***тихоновской***. Нет сомнений, что равномерная топология $\tau(\mathscr{U}_{\mathfrak{X}})$ — это тихоновская топология произведения $(X_\xi, \tau(\mathscr{U}_\xi))_{\xi\in\Xi}$. ◁▷

**(5)** *Хаусдорфово компактное пространство равномеризуемо, и притом единственным образом.*

◁ В силу 9.4.15 такое пространство $X$ можно рассматривать как подпространство тихоновского куба. Из 9.5.5 (3) и 9.5.5 (4) следует равномеризуемость $X$. Поскольку, как видно, каждое окружение диагонали в равномерном пространстве содержит замкнутое окружение, то из компактности множества $I_X$ вытекает, что всякая его окрестность входит в $\mathscr{U}_X$. С другой стороны, любое окружение всегда окрестность диагонали. ▷

**(6)** Пусть $X$, $Y$ — непустые множества, $\mathscr{U}_Y$ — равномерность в $Y$ и $\mathscr{B}$ — фильтрованное по возрастанию подмножество $2^X$. Для $B \in \mathscr{B}$ и $\theta \in \mathscr{U}_Y$ положим

$$U_{B,\theta} := \{(f,\ g) \in Y^X \times Y^X :\ g \circ I_B \circ f^{-1} \subset \theta\}.$$

Тогда $\mathscr{U} := \operatorname{fil}\{U_{B,\theta} : \ B \in \mathscr{B}, \ \theta \in \mathscr{U}_Y\}$ — равномерность в $Y^X$, имеющая неизящное (но точное) название: «равномерность равномерной сходимости на множествах из $\mathscr{B}$». Такова, например, равномерность мультинормы Аренса (см. 8.3.8). В случае, если $\mathscr{B}$ есть совокупность конечных подмножеств $X$, то $\mathscr{U}$ совпадает с тихоновской равномерностью в $Y^X$. Эту равномерность в данной ситуации называют *слабой*, а соответствующую топологию — *топологией поточечной сходимости* (реже — *простой сходимости*). Если же $\mathscr{B}$ состоит из единственного элемента — из $\{X\}$, то равномерность $\mathscr{U}$ называют *сильной*, а соответствующую топологию $\tau(\mathscr{U})$ в $Y^X$ — *топологией равномерной сходимости*.

**9.5.6.** Замечание. Ясно, что в равномерных (и равномеризуемых) пространствах имеют смысл такие понятия, как равномерная непрерывность, малость данного порядка, полнота и т. п. В этих пространствах, как видно, сохранены аналоги 4.2.4–4.2.9, 4.5.8, 4.5.9, 4.6.1–4.6.7. Полезными упражнениями являются осмысливание возможности пополнения равномерного пространства, доказательство критерия Хаусдорфа, анализ доказательства теоремы Асколи — Арцела и т. п.

**9.5.7.** Определение. Пусть $X$ — множество, $\mathbb{R}^{\cdot}_{+} := \{x \in \mathbb{R}^{\cdot} : x \geq 0\}$. Отображение $d : X^2 \to \mathbb{R}_{+}$ называют *полуметрикой* или *отклонением* на $X$, если

**(1)** $d(x, \ x) = 0 \ (x \in X)$;

**(2)** $d(x, \ y) = d(y, \ x) \ (x, \ y \in X)$;

**(3)** $d(x, \ y) \leq d(x, \ z) + d(z, \ y) \ (x, \ y, \ z \in X)$.

Пару $(X, \ d)$ называют *полуметрическим пространством.*

**9.5.8.** *Для полуметрического пространства $(X, \ d)$ положим*

$$\mathscr{U}_d := \operatorname{fil}\{\{d \leq \varepsilon\} : \ \varepsilon > 0\}.$$

*Тогда $\mathscr{U}_d$ — равномерность.* $\lhd\rhd$

**9.5.9.** Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — (непустое) множество полуметрик на $X$. Тогда пару $(X, \ \mathfrak{M})$ называют *мультиметрическим пространством*, а множество $\mathfrak{M}$ — *мультиметрикой. Равномерность мультиметрического пространства* определяют соотношением

$$\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} := \sup\{\mathscr{U}_d : \ d \in \mathfrak{M}\}.$$

**9.5.10.** Определение. Равномерное пространство принято называть *мультиметризуемым*, если его равномерность совпадает с равномерностью некоторого мультиметрического пространства. По аналогии определяют и мультиметризуемые топологические пространства.

**9.5.11.** *Пусть $X$, $Y$, $Z$ — множества, $T$ — плотное подмножество $\overline{\mathbb{R}}$ и $(U_t)_{t\in T}$, $(V_t)_{t\in T}$ — возрастающие семейства множеств, лежащих соответственно в $X \times Z$ и в $Z \times Y$. Тогда существуют, и притом единственные, функции*

$$f : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}, \quad g : Z \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad h : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$$

*такие, что*

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \le t\}, \quad \{g < t\} \subset V_t \subset \{g \le t\},$$
$$\{h < t\} \subset U_t \circ V_t \subset \{h \le t\} \quad (t \in T).$$

*При этом имеет место представление*

$$h(x,\ y) = \inf\{f(x,\ z) \vee g(z,\ y) :\ z \in Z\}.$$

$\triangleleft$ Существование требуемых функций обеспечено 3.8.2. Единственность — 3.8.4. Представление функции $h$ через $f$ и $g$ бесспорно. $\triangleright$

**9.5.12.** Определение. Пусть $f : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Z \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Функцию $h$, заданную с помощью 9.5.11, называют $\vee$-*конволюцией* $f$ и $g$ и обозначают

$$f \,\square_\vee\, g(x,\ y) := \inf\{f(x,\ z) \vee g(z,\ y) :\ z \in Z\}.$$

Аналогично определяют $+$-*конволюцию* $f$ и $g$ по правилу

$$f \,\square_+\, g(x,\ y) := \inf\{f(x,\ z) + g(z,\ y) :\ z \in Z\}.$$

**9.5.13.** Определение. Отображение $f : X^2 \to \mathbb{R}^{\cdot}_+$ называют $K$-*ультраметрикой* ($K \in \mathbb{R},\ K \ge 1$), если

**(1)** $f(x,\ x) = 0$ $(x \in X)$;

**(2)** $f(x,\ y) = f(y,\ x)$ $(x,\ y \in X)$;

**(3)** $\frac{1}{K} f(x,\ u) \le f(x,\ y) \vee f(y,\ z) \vee f(z,\ u)$ $(x,\ y,\ z,\ u \in X)$.

**9.5.14.** Замечание. Условие 9.5.13 (3) иногда называют (сильным) *ультраметрическим неравенством.* Это неравенство можно в силу 9.5.12 переписать в виде $K^{-1}f \le f\,\square_\vee\, f\,\square_\vee f$.

**9.5.15. *Лемма о 2-ультраметрике.*** *Для каждой 2-ультраметрики $f : X^2 \to \mathbb{R}^{\cdot}_{+}$ существует полуметрика $d$ такая, что $1/2f \le d \le f$.*

$\lhd$ Пусть $f_1 := f$; $f_{n+1} := f_n \square_+ f$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда

$$f_{n+1}(x,\ y) \le f_n(x,\ y) + f(y,\ y) = f_n(x,\ y) \quad (x,\ y \in X).$$

Таким образом, $(f_n)$ — убывающая последовательность. Положим

$$d(x,\ y) := \lim f_n(x,\ y) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x,\ y).$$

Поскольку для $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$d(x,\ y) \le f_{2n}(x,\ y) = f_n \square_+ f_n(x,\ y) \le f_n(x,\ z) + f_n(z,\ y),$$

то $d(x,\ y) \le d(x,\ z) + d(z,\ y)$. Справедливость 9.5.7 (1) и 9.5.7 (2) несомненна.

Осталось установить, что $1/2\, f \le d$. Для этого убедимся, что $f_n \ge 1/2\, f$ для $n \in \mathbb{N}$.

При $n := 1, 2$ требуемые неравенства очевидны. Допустим теперь, что $f \ge f_1 \ge \ldots \ge f_n \ge 1/2\, f$ и в то же время $f_{n+1}(x,\ y) < 1/2\, f(x,\ y)$ для некоторых $(x,\ y) \in X^2$ и $n \ge 2$. По построению при подходящих $z_1, \ldots, z_n \in X$ будет

$$t := f(x,\ z_1) + f(z_1,\ z_2) + \ldots + f(z_{n-1},\ z_n) + \\ + f(z_n, y) < \frac{1}{2} f(x,\ y).$$

Если $f(x,\ z_1) \ge t/2$, то $t/2 \ge f(z_1,\ z_2) + \ldots + f(z_n,\ y) \ge 1/2\, f(z_1,\ y)$. Получаем, что $t \ge f(x,\ z_1)$ и $t \ge f(z_1,\ y)$. На основании 9.5.13 (3), $1/2\, f(x,\ y) \le f(x,\ z_1) \vee f(z_1,\ y) \le t$. Отсюда вытекает ложное соотношение: $1/2\, f(x,\ y) > t \ge 1/2\, f(x,\ y)$.

Итак, $f(x,\ z_1) < t/2$. Найдем $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, для которого

$$f(x,\ z_1) + \ldots + f(z_{m-1},\ z_m) < \frac{t}{2};$$

$$f(x,\ z_1) + \ldots + f(z_m,\ z_{m+1}) \geq \frac{t}{2}.$$

Это осуществимо, ибо гипотеза $m = n$ влечет неверное неравенство $f(z_n,\ y) \geq t/2$. (В самом деле, было бы $t/2 \geq f(x,\ z_1) + \ldots + f(z_{n-1},\ z_n) \geq 1/2\, f(x,\ z_n)$ и поэтому $1/2\, f(x,\ y) > t \geq f(x,\ z^n) \vee f(z_n,\ y) \geq 1/2\, f(x,\ y)$.)

Имеем

$$f(z_{m+1}, z_{m+2}) + \ldots + f(z_{n-1},\ z_n) + f(z_n,\ y) < \frac{t}{2}.$$

Привлекая индукционное предположение, заключаем:

$$f(x,\ z_m) \leq 2(f(x,\ z_1) + \ldots + f(z_{m-1},\ z_m)) \leq t;$$
$$f(z_m,\ z_{m+1}) \leq t;$$
$$f(z_{m+1},\ y) \leq 2(f(z_{m+1},\ z_{m+2}) + \ldots + f(z_n,\ y)) \leq t.$$

Следовательно, в силу определения 2-ультраметрики

$$\frac{1}{2}f(x,\ y) \leq f(x,\ z_m) \vee f(z_m,\ z_{m+1}) \vee f(z_{m+1},\ y) \leq t < \frac{1}{2}f(x,\ y).$$

Получили противоречие, завершающее доказательство. $\triangleright$

**9.5.16. *Теорема.*** *Каждое равномерное пространство мультиметризуемо.*

$\triangleleft$ Пусть $(X,\ \mathscr{U}_X)$ — рассматриваемое равномерное пространство. Возьмем $V \in \mathscr{U}_X$. Положим $V_1 := V \cap V^{-1}$. Если теперь $V_n \in \mathscr{U}_X$, то найдем симметричное окружение $\overline{V} = \overline{V}^{-1}$, $\overline{V} \in \mathscr{U}_X$ такое, что $\overline{V} \circ \overline{V} \circ \overline{V} \subset V_n$. Полагаем $V_{n+1} := \overline{V}$. Так как по построению $V_n \supset V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \supset V_{n+1} \circ I_X \circ I_X \supset V_{n+1}$, то $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — убывающее семейство.

Для $t \in \mathbb{R}$ зададим множество $U_t$ соотношением

$$U_t := \begin{cases} \varnothing, & t < 0, \\ I_X, & t = 0, \\ V_{\inf\{n\in\mathbb{N}\,:\,t\geq 2^{-n}\}}, & 0 < t < 1, \\ V_1, & t = 1, \\ X^2, & t > 1. \end{cases}$$

По определению $t \mapsto U_t$ $(t \in \mathbb{R})$ — возрастающее семейство. Рассмотрим единственную функцию $f : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющую соотношениям (ср. 3.8.2, 3.8.4)

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \le t\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Если $W_t := U_{2t}$ для $t \in \mathbb{R}$, то при $s < t$ будет

$$U_s \circ U_s \circ U_s \subset W_t.$$

Следовательно, в силу 3.8.3 и 9.2.1 отображение $f$ является 2-ультраметрикой.

Привлекая 9.5.15, найдем полуметрику $d_V$ такую, что $1/2\,f \le d_V \le f$. Ясно, что $\mathscr{U}_{d_V} = \operatorname{fil}\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Несомненно также, что для мультиметрики $\mathfrak{M} := \{d_V : V \in \mathscr{U}_X\}$ выполнено $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_X$. ▷

**9.5.17. *Следствие.*** *Пространство является равномеризуемым в том и только в том случае, если оно $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство.* ◁▷

**9.5.18. *Следствие.*** *Тихоновские пространства суть отделимые мультиметрические пространства.* ◁▷

## 9.6. Покрытия и разбиения единицы

**9.6.1.** Определение. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ — два *покрытия* множества $U$ в $X$, т. е. $\mathscr{E}, \mathscr{F} \subset 2^X$ и $U \subset (\cup\mathscr{E}) \cap (\cup\mathscr{F})$. Говорят, что $\mathscr{E}$ *вписано* в $\mathscr{F}$ или $\mathscr{E}$ *измельчает* $\mathscr{F}$, если каждое множество из $\mathscr{E}$ попадает в один из элементов $\mathscr{F}$, т. е. $(\forall\, E \in \mathscr{E})\ (\exists\, F \in \mathscr{F})\ E \subset F$.

**9.6.2.** Определение. Покрытие $\mathscr{E}$ множества $X$ называют *локально конечным* (относительно топологии $\tau$ в $X$), если у каждой точки из $X$ имеется окрестность (в смысле $\tau$), пересекающаяся лишь с конечным числом элементов $\mathscr{E}$. Такое покрытие в случае дискретной топологии называют *точечно конечным.* Наконец, если $X$ рассматривают с предварительно выделенной топологией $\tau$, то под локальной конечностью его покрытия по умолчанию понимают связанный с $\tau$ вариант.

**9.6.3. *Лемма Лефшеца.*** *Пусть $\mathscr{E}$ — точечно конечное открытое покрытие нормального пространства $X$. Существует такое открытое покрытие $\{G_E : E \in \mathscr{E}\}$, что $\operatorname{cl} G_E \subset E$ при всех $E \in \mathscr{E}$.*