По определению $t \mapsto U_t$ $(t \in \mathbb{R})$ — возрастающее семейство. Рассмотрим единственную функцию $f : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющую соотношениям (ср. 3.8.2, 3.8.4)

$$\{f < t\} \subset U_t \subset \{f \leq t\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Если $W_t := U_{2t}$ для $t \in \mathbb{R}$, то при $s < t$ будет

$$U_s \circ U_s \circ U_s \subset W_t.$$

Следовательно, в силу 3.8.3 и 9.2.1 отображение f является 2-ультраметрикой.

Привлекая 9.5.15, найдем полуметрику d_V такую, что $1/2\, f \leq d_V \leq f$. Ясно, что $\mathscr{U}_{d_V} = \operatorname{fil}\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Несомненно также, что для мультиметрики $\mathfrak{M} := \{d_V : V \in \mathscr{U}_X\}$ выполнено $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{U}_X$. $\triangleright$

9.5.17. *Следствие.* *Пространство является равномеризуемым в том и только в том случае, если оно* $T_{3\frac{1}{2}}$*-пространство.* $\triangleleft\triangleright$

9.5.18. *Следствие.* *Тихоновские пространства суть отделимые мультиметрические пространства.* $\triangleleft\triangleright$

9.6. Покрытия и разбиения единицы

9.6.1. Определение. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ — два *покрытия* множества U в X, т. е. $\mathscr{E}, \mathscr{F} \subset 2^X$ и $U \subset (\cup\mathscr{E}) \cap (\cup\mathscr{F})$. Говорят, что $\mathscr{E}$ *вписано* в $\mathscr{F}$ или $\mathscr{E}$ *измельчает* $\mathscr{F}$, если каждое множество из $\mathscr{E}$ попадает в один из элементов $\mathscr{F}$, т. е. $(\forall\, E \in \mathscr{E})\ (\exists\, F \in \mathscr{F})\ E \subset F$.

9.6.2. Определение. Покрытие $\mathscr{E}$ множества X называют *локально конечным* (относительно топологии τ в X), если у каждой точки из X имеется окрестность (в смысле τ), пересекающаяся лишь с конечным числом элементов $\mathscr{E}$. Такое покрытие в случае дискретной топологии называют *точечно конечным*. Наконец, если X рассматривают с предварительно выделенной топологией τ, то под локальной конечностью его покрытия по умолчанию понимают связанный с τ вариант.

9.6.3. *Лемма Лефшеца.* *Пусть* $\mathscr{E}$ *— точечно конечное открытое покрытие нормального пространства* X*. Существует такое открытое покрытие* $\{G_E : E \in \mathscr{E}\}$*, что* $\operatorname{cl} G_E \subset E$ *при всех* $E \in \mathscr{E}$*.*

$\lhd$ Составим множество S из отображений $s : \mathscr{E} \to \mathrm{Op}(X)$, для которых $\cup s(\mathscr{E}) = X$ и при $E \in \mathscr{E}$ будет $s(E) = E$ или $\mathrm{cl}\, s(E) \subset E$. Для подобных функций s_1, s_2 полагают: $s_1 \le s_2 := (\forall E \in \mathscr{E})$ $(s_1(E) \ne E \Rightarrow s_2(E) = s_1(E))$. Видно, что $(S, \le)$ — упорядоченное множество, причем $I_{\mathscr{E}} \in S$. Установим индуктивность S.

Для цепи S_0 в S положим $s_0(E) := \cap\{s(E) :\ s \in S_0\}$ $(E \in \mathscr{E})$. Если $s_0(E) = E$, то $s(E) = E$ при всех $s \in S_0$. Если же $s_0(E) \ne E$, то $s_0(E) = \cap\{s(E) :\ s(E) \ne E,\ s \in S_0\}$.

С учетом линейности порядка в S_0 выводим: $s_0(E) = s(E)$ для $s \in S_0$ таких, что $s(E) \ne E$. Отсюда $s_0(\mathscr{E}) \subset \mathrm{Op}(X)$ и $s_0 \ge S_0$. Осталось удостовериться, что s_0 — покрытие X (и, стало быть, $s_0 \in S$). По условию точечной конечности для $x \in X$ имеются $E_1, \dots, E_n$ в $\mathscr{E}$ такие, что $x \in E_1 \cap \ldots \cap E_n$ и $x \notin E$ для иных E в $\mathscr{E}$. Если $s(E_k) = E_k$ для какого-либо из k, то доказывать нечего — $x \in \cup s_0(\mathscr{E})$. В случае, когда при каждом k будет $s_0(E_k) \ne E_k$, найдутся $s_1, \dots, s_n \in S_0$ из условия $s_k(E_k) \ne E_k$ $(k := 1, 2, \dots, n)$. Раз S_0 — цепь, можно считать, что $s_n \ge \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$. При этом $x \in s_n(\overline{E}) \subset \overline{E}$ для подходящего $\overline{E} \in \mathscr{E}$. Ясно, что $\overline{E} \in \{E_1, \dots, E_n\}$ (ибо $x \notin E$ для других E). Раз $s_0(\overline{E}) = s_n(\overline{E})$, то $x \in s_0(\overline{E})$.

По лемме Куратовского — Цорна 1.2.20 в S есть максимальный элемент $\bar{s}$. Возьмем $E \in \mathscr{E}$. Если $F := X \setminus \cup \bar{s}(\mathscr{E} \setminus \{E\})$, то F замкнуто и $\bar{s}(E)$ — окрестность F. На основании 9.3.10 при подходящем $G \in \mathrm{Op}(X)$ будет $F \subset G \subset \mathrm{cl}\, G \subset \bar{s}(E)$. Положим $s(E) := G$ и $s(\overline{E}) := \bar{s}(\overline{E})$ для $\overline{E} \ne E$ $(\overline{E} \in \mathscr{E})$. Ясно, что $s \in S$. Если $\bar{s}(E) = E$, то $s \ge \bar{s}$ и, значит, $s = \bar{s}$. При этом $\bar{s}(E) \subset \mathrm{cl}\, G \subset \bar{s}(E) = E$, т. е. $\mathrm{cl}\, \bar{s}(E) \subset E$. Если же $\bar{s}(E) \ne E$, то $\mathrm{cl}\, \bar{s}(E) \subset E$ по определению. Итак, $\bar{s}$ — искомое покрытие. $\rhd$

9.6.4. Определение. Пусть f — *скалярная* (= *числовая*) функция на топологическом пространстве X, т. е. $f : X \to \mathbb{F}$. Множество $\mathrm{supp}(f) := \mathrm{cl}\{x \in X :\ f(x) \ne 0\}$ называют ***носителем*** f. Если $\mathrm{supp}(f)$ — компактное множество, то f называют ***финитной функцией***. Иногда полагают $\mathrm{spt}\,(f) := \mathrm{supp}(f)$.

9.6.5. *Пусть $(f_e)_{e \in \mathscr{E}}$ — некоторое семейство скалярных функций на X и $\bar{\mathscr{E}} := \{\mathrm{supp}(f_e) :\ e \in \mathscr{E}\}$ — семейство их носителей. Если $\bar{\mathscr{E}}$ — точечно конечное покрытие U, то семейство $(f_e)_{e \in \mathscr{E}}$ поточечно суммируемо. Если к тому же $\bar{\mathscr{E}}$ локально конечно, а $(f_e)_{e \in \mathscr{E}}$ непрерывны, то сумма $\sum_{e \in \mathscr{E}} f_e$ также непрерывна.*

$\triangleleft$ Достаточно заметить, что в подходящей окрестности точки из U лишь конечное число функций семейства $(f_e)_{e\in\mathscr{E}}$ не обращается в нуль. $\triangleright$

9.6.6. Определение. Семейство функций $(f : X \to [0,\ 1])_{f\in F}$ представляет *разбиение единицы* на множестве U в X, если носители элементов этого семейства составляют точечно конечное покрытие U, и при этом $\sum_{f\in F} f(x) = 1$ для всех $x \in U$. Пустое семейство функций в подобном контексте считают суммируемым к единице. Естественным образом трактуют термин «*непрерывное разбиение единицы*» и его аналоги.

9.6.7. Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — покрытие множества U в топологическом пространстве, а F — непрерывное разбиение единицы на U. Если семейство носителей $\{\operatorname{supp}(f) :\ f \in F\}$ вписано в $\mathscr{E}$, то F называют *разбиением единицы, подчиненным* $\mathscr{E}$. Наличие такого F для $\mathscr{E}$ выражают словами: «*$\mathscr{E}$ допускает непрерывное разбиение единицы*».

9.6.8. *Каждое локально конечное открытое покрытие нормального пространства допускает разбиение единицы.*

$\triangleleft$ По теореме Лефшеца 9.6.3 в рассматриваемое покрытие $\{U_\xi :\ \xi \in \Xi\}$ можно вписать открытое покрытие $\{V_\xi :\ \xi \in \Xi\}$, для которого $\operatorname{cl} V_\xi \subset U_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. По теореме Урысона 9.3.14 имеется непрерывная функция $g_\xi : X \to [0,\ 1]$ такая, что $g_\xi(x) = 1$ при $x \in V_\xi$ и $g_\xi(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_\xi$. Значит, $\operatorname{supp}(g_\xi) \subset U_\xi$. На основании 9.6.5 семейство $(g_\xi)_{\xi\in\Xi}$ поточечно суммируемо к непрерывной функции g. При этом $g(x) > 0$ для всех $x \in X$ по построению. Полагаем $f_\xi := g_\xi/g$ $(\xi \in \Xi)$. Семейство $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — искомое. $\triangleright$

9.6.9. Определение. Топологическое пространство называют *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

9.6.10. Замечание. Теория паракомпактности содержит глубокие и нетривиальные факты.

9.6.11. ***Теорема.*** *Метрические пространства паракомпактны.*

9.6.12. ***Теорема.*** *Хаусдорфово топологическое пространство паракомпактно в том и только в том случае, если каждое его открытое покрытие допускает непрерывное разбиение единицы.*

9.6.13. Замечание. Метрическое пространство $\mathbb{R}^N$ обладает рядом дополнительных структур, обеспечивающих запас квалифицированных — *гладких* (= бесконечно дифференцируемых) — функций (ср. 4.8.1).

9.6.14. Определение. *Усредняющим ядром* в $\mathbb{R}^N$ принято называть любую вещественную гладкую функцию a с единичным (лебеговым) интегралом и такую, что $a(x) > 0$ при $|x| < 1$ и $a(x) = 0$ для $|x| \geq 1$. При этом $\operatorname{supp}(a) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| \leq 1\}$ — единичный евклидов шар $\mathbb{B} := B_{\mathbb{R}^N}$.

9.6.15. Определение. *Дельтообразной последовательностью* называют такое семейство вещественных (гладких) функций $(b_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, что, во-первых, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\sup|\operatorname{supp}(b_\varepsilon)|) = 0$ и, во-вторых, $\int_{\mathbb{R}^N} b_\varepsilon(x)\,dx = 1$ $(\varepsilon > 0)$. Используют также термины *δ-последовательность* и *δ-образная последовательность*. Часто ограничиваются счетными последовательностями.

9.6.16. Пример. Популярное усредняющее ядро — это функция $a(x) := t\exp(-(|x|^2-1)^{-1})$, доопределенная нулем вне шара $\operatorname{int}\mathbb{B}$, где константа t задана условием $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\,dx = 1$. Всякое усредняющее ядро порождает дельтообразную последовательность $a_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N}a(x/\varepsilon)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$.

9.6.17. Определение. Пусть $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, т. е. f — некоторая *локально интегрируемая* (= интегрируемая при сужении на любой компакт) функция. Для каждой финитной интегрируемой функции g определяют *свёртку* $f * g$ соотношением

$$f * g(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

9.6.18. Замечание. Роль усредняющих ядер и дельтообразных последовательностей $(a_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ проясняется анализом *процесса сглаживания* $f \mapsto (f * a_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ функции $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и его последствий (ср. 10.10.7 (5)).

9.6.19. *Справедливы утверждения:*

(1) *для каждого компактного множества K из пространства $\mathbb{R}^N$ и какой-либо его окрестности U существует* *срезыватель (= срезывающая функция)* $\psi := \psi_{K,U}$, *т. е. такое гладкое отображение* $\psi : \mathbb{R}^N \to [0,\ 1]$, *что* $K \subset \operatorname{int}\{\psi = 1\}$ *и* $\operatorname{supp}(\psi) \subset U$;

(2) *пусть* $U_1, \dots, U_n \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$, *причем* $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ — *окрестность компакта* K. *Существуют гладкие функции* $\psi_1, \dots, \psi_n : \mathbb{R}^N \to [0,\ 1]$, *удовлетворяющие условиям* $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset U_k$ *и* $\sum_{k=1}^n \psi_k(x) = 1$ *для* x *из некоторой окрестности* K.

$\triangleleft$ (1) Пусть $\varepsilon := d(K,\ \mathbb{R}^N \setminus U) := \inf\{|x-y| :\ x \in K,\ y \notin U\}$. Ясно, что $\varepsilon > 0$. Для $\beta > 0$ обозначим χ_β характеристическую функцию множества $K + \varepsilon\mathbb{B}$. Возьмем дельтообразную последовательность положительных функций $(b_\gamma)_{\gamma>0}$ и положим $\psi := \chi_\beta * b_\gamma$. При $\overline{\gamma} \le \beta$, $\beta + \overline{\gamma} \le \varepsilon$, где $\overline{\gamma} := \sup|\operatorname{supp}(b_\gamma)|$, функция ψ — искомая.

(2) По лемме Дьедонне 9.4.18 имеются замкнутые $F_k \subset U_k$, составляющие покрытие K. Положим $K_k := F_k \cap K$ и рассмотрим срезыватели $\psi_k := \psi_{K_k, U_k}$. Функции $\psi_k / \sum_{k=1}^n \psi_k$ $(k := 1, \dots, n)$, определенные на $\{\sum_{k=1}^n \psi_k > 0\}$, после распространения нулем на $\{\sum_{k=1}^n \psi_k = 0\}$ и умножения на срезыватель подходящей окрестности K становятся искомыми. $\triangleright$

9.6.20. Теорема о разбиении единицы в $\mathbb{R}^N$. *Пусть* $\mathscr{E}$ — *семейство открытых множеств в* $\mathbb{R}^N$ *и* $\Omega := \cup\mathscr{E}$. *Существует счетное разбиение единицы, составленное гладкими финитными функциями на* $\mathbb{R}^N$ *и подчиненное покрытию* $\mathscr{E}$ *множества* Ω.

$\triangleleft$ Впишем в $\mathscr{E}$ такое счетное локально конечное покрытие A из компактных множеств, что семейство $(\overline{\alpha} := \operatorname{int}\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ также образует открытое покрытие Ω. Подберем открытое покрытие $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ из условия $\operatorname{cl} V_\alpha \subset \overline{\alpha}$ при $\alpha \in \mathrm{A}$. На основании 9.6.19 (1) имеются срезыватели $\overline{\psi}_\alpha := \psi_{\operatorname{cl} V_\alpha, \overline{\alpha}}$. Полагая $\psi_\alpha(x) := \overline{\psi}_\alpha(x) / \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \overline{\psi}_\alpha(x)$ при $x \in \Omega$ и $\psi_\alpha(x) := 0$ для $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, приходим к требуемому разбиению. $\triangleright$

9.6.21. Замечание. Стоит подчеркнуть, что построенное разбиение единицы $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ обладает тем свойством, что для каждого компакта K, лежащего в Ω, имеются конечное подмножество A_0 в A и окрестность U компакта K такие, что $\sum_{\alpha \in \mathrm{A}_0} \psi_\alpha(x) = 1$ для всех $x \in U$ (ср. 9.3.17, 9.6.19 (2)).