верхнюю и точную нижнюю границы: $\sup\varnothing = \inf\mathscr{X} = \{X\}$ и $\inf\varnothing = \sup\mathscr{X} = \mathscr{F}_0$. В силу 1.2.17 и 1.3.8 достаточно установить существование $\mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2$ для любых $\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2 \in \mathscr{X}$. Рассмотрим $\mathscr{F} := \{A_1 \cap A_2 : A_1 \in \mathscr{F}_1,\ A_2 \in \mathscr{F}_2\}$. Нет сомнений, что $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_1,\ \mathscr{F} \supset \mathscr{F}_2$. Поэтому для проверки равенства $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2$ нужно доказать, что $\mathscr{F}$ — фильтр.

Соотношения $\mathscr{F} \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin \mathscr{F}$ очевидны. Ясно также, что (B_1, $B_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathscr{F}$). Помимо этого, если $C \supset A_1 \cap A_2$, где $A_1 \in \mathscr{F}_1$ и $A_2 \in \mathscr{F}_2$, то $C = \{A_1 \cap A_2\} \cup C = (A_1 \cup C) \cap (A_2 \cup C)$. Поскольку $A_1 \cup C \in \mathscr{F}_1$, а $A_2 \cup C \in \mathscr{F}_2$, выводим: $C \in \mathscr{F}$. Апелляция к 1.3.4 дает требуемое. $\triangleright$

Упражнения

1.1. Привести примеры множеств и не множеств, теоретико-множественных свойств и не теоретико-множественных свойств.

1.2. Может ли отрезок [0, 1] быть элементом отрезка [0, 1]? А отрезок [0, 2]?

1.3. Найти композиции простейших соответствий и отношений: квадратов, кругов и окружностей с общими и с несовпадающими центрами, шаров в $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ при различных допустимых наборах $M,\ N$.

1.4. Для соответствий $R,\ S,\ T$ установить соотношения:

$$
\begin{aligned}
(R\cup S)^{-1} &= R^{-1}\cup S^{-1}; & (R\cap S)^{-1} &= R^{-1}\cap S^{-1};\\
(R\cup S)\circ T &= (R\circ T)\cup(S\circ T); & R\circ(S\cup T) &= (R\circ S)\cup(R\circ T);\\
(R\cap S)\circ T &\subset (R\circ T)\cap(S\circ T); & R\circ(S\cap T) &\subset (R\circ S)\cap(R\circ T).
\end{aligned}
$$

1.5. Пусть $X \subset X \times X$. Доказать, что $X = \varnothing$.

1.6. Выяснить условия разрешимости уравнений $\mathscr{X}A = B$ и $A\mathscr{X} = B$ относительно $\mathscr{X}$ в соответствиях, в функциях.

1.7. Найти число отношений эквивалентности на конечном множестве.

1.8. Будет ли эквивалентностью пересечение эквивалентностей? Объединение эквивалентностей?

1.9. Найти условие коммутативности эквивалентностей (относительно композиции).

1.10. Сколько порядков и предпорядков на двух- и трехэлементном множествах? Предъявить их. Что можно сказать о числе предпорядков на конечном множестве?

1.11. Пусть F — возрастающее, идемпотентное отображение упорядоченного множества X в себя. Допустим, что F мажорирует тождественное отображение: $F \geq I_X$. Такие F называют операторами (абстрактного) ***замыкания*** или, короче, оболочками. Исследовать свойства неподвижных точек оператора замыкания.

1.12. Пусть X, Y — упорядоченные множества и $M(X, Y)$ — множество возрастающих отображений X в Y с естественным упорядочением (каким?). Доказать, что

(1) ($M(X, Y)$ — решетка) $\Leftrightarrow$ (Y — решетка);
(2) ($M(X, Y)$ — полная решетка) $\Leftrightarrow$ (Y — полная решетка).

1.13. Установить, что для упорядоченных множеств X, Y, Z справедливы следующие утверждения:

(1) $M(X, Y \times Z)$ изоморфно $M(X, Y) \times M(Y, Z)$;
(2) $M(X \times Y, Z)$ изоморфно $M(X, M(Y, Z))$.

1.14. Сколько фильтров на конечном множестве?

1.15. Как устроены точные границы множества фильтров?

1.16. Пусть f отображает X на Y. Доказать, что каждый ультрафильтр в Y есть образ относительно f некоторого ультрафильтра в X.

1.17. Доказать, что каждый ультрафильтр, мажорирующий пересечение двух фильтров, тоньше хотя бы одного из них.

1.18. Доказать, что каждый фильтр представляет собою пересечение содержащих его ультрафильтров.

1.19. Пусть $\mathscr{A}$ — ультрафильтр в $\mathbb{N}$, содержащий дополнения конечных подмножеств. Для $x,\ y \in s := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ положим $x \sim_{\mathscr{A}} y := (\exists\, A \in \mathscr{A})\ x|_A = y|_A$. Обозначим $*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\!\sim_{\mathscr{A}}$. Для $t \in \mathbb{R}$ знак $*t$ символизирует класс, содержащий постоянную последовательность $\bar{t}(n) := t\ (n \in \mathbb{N})$. Доказать, что $*\mathbb{R} \setminus \{*t : t \in \mathbb{R}\} \neq \varnothing$. Ввести в $*\mathbb{R}$ алгебраические и порядковую структуры. Как связаны свойства $\mathbb{R}$ и $*\mathbb{R}$?