Привлекая 3.5.3 и 3.5.7, для некоторых $\mu_\alpha \in M(\mathbb{R}^N)$ получаем

$$u(f) = \sum_{|\alpha|\le n} \mu_\alpha\left((1+|\cdot|^2)^n \partial^\alpha f\right) \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

Пусть $\nu_\alpha := (-1)^{|\alpha|}(1+|\cdot|^2)^n \mu_\alpha$. Тогда ν_α — умеренная мера, причем

$$u = \sum_{|\alpha|\le n} \partial^\alpha \nu_\alpha. \ \triangleright$$

10.11.19. Определение. ***Преобразованием Фурье*** (или, полнее, ***Фурье — Шварца***) умеренного распределения u из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ называют распределение $\mathfrak{F}u$, действующее по правилу

$$\langle f \,|\, \mathfrak{F}u\rangle = \langle \mathfrak{F}f \,|\, u\rangle \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

10.11.20. *Теорема.* *Преобразование Фурье — Шварца $\mathfrak{F}$ — это единственное продолжение преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ до топологического автоморфизма $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. Обратное отображение $\mathfrak{F}^{-1}$ — единственное непрерывное продолжение обратного преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.*

$\triangleleft$ Преобразование Фурье — Шварца представляет собой сопряженный оператор к преобразованию Фурье в пространстве Шварца. Остается только апеллировать к 10.11.7 (5), 10.11.12, 10.11.17 (2) и 4.5.10. $\triangleright$

Упражнения

10.1. Привести примеры линейных топологических пространств и локально выпуклых пространств и конструкций, приводящих к ним.

10.2. Доказать, что хаусдорфово топологическое векторное пространство конечномерно в том и только в том случае, если оно локально компактно.

10.3. Охарактеризовать слабо непрерывные сублинейные функционалы.

10.4. Доказать, что нормируемость или метризуемость слабой топологии локально выпуклого пространства равносильна его конечномерности.

10.5. Выяснить смысл слабой сходимости в классических банаховых пространствах.

10.6. Доказать, что нормированное пространство конечномерно в том и только в том случае, если слабо замкнута единичная сфера (= сильная граница единичного шара).

10.7. Пусть оператор T переводит слабо сходящиеся сети в сети, сходящиеся по норме. Доказать, что T конечномерен.

10.8. Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — линейный оператор. Доказать, что T ограничен в том и только в том случае, если T слабо непрерывен (т. е. непрерывен как отображение $(X,\ \sigma(X,\ X'))$ в $(Y,\ \sigma(Y,\ Y')))$.

10.9. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы, превращающие X в банахово пространство, причем $(X,\ \|\cdot\|_1)' \cap (X,\ \|\cdot\|_2)'$ разделяет точки X. Доказать, что исходные нормы эквивалентны.

10.10. Пусть S действует из Y' в X'. Когда S служит сопряженным оператором к некоторому отображению X в Y?

10.11. Какова топология Макки $\tau(X,\ X^{\#})$?

10.12. Пусть $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — некоторое семейство локально выпуклых пространств. Пусть, далее, $X := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ — их произведение. Доказать, что справедливы представления

$$\sigma(X,\ X') = \prod_{\xi\in\Xi} \sigma(X_\xi,\ X'_\xi);$$

$$\tau(X,\ X') = \prod_{\xi\in\Xi} \tau(X_\xi,\ X'_\xi).$$

10.13. Пусть X и Y — банаховы пространства, T — элемент $B(X,\ Y)$ и $\operatorname{im} T = Y$. Доказать, что рефлексивность X обеспечивает рефлексивность Y.

10.14. Доказать, что пространства $(X')''$ и $(X'')'$ совпадают.

10.15. Доказать, что в пространстве c_0 нет бесконечномерных рефлексивных подпространств.

10.16. Пусть p — непрерывный сублинейный функционал на Y, а $T \in \mathscr{L}(X,\ Y)$ — непрерывный линейный оператор. Установить, что для множеств крайних точек справедливо включение $\operatorname{ext}(T'(\partial p)) \subset T'(\operatorname{ext}(\partial p))$.

10.17. Пусть p — непрерывная полунорма на X и $\mathscr{X}$ — подпространство X. Доказать, что $f \in \operatorname{ext}(\mathscr{X}^\circ \cap \partial p)$ в том и только в том случае, если справедливо равенство

$$X = \operatorname{cl} \mathscr{X} + \{p - f \le 1\} - \{p - f \le 1\}.$$

10.18. Доказать, что абсолютно выпуклая оболочка вполне ограниченного подмножества локально выпуклого пространства также вполне ограничена.

10.19. Установить, что борнологичность сохраняется при переходе к индуктивному пределу. Как обстоят дела с иными линейно топологическими свойствами?