$$= \sum_{s \in S(A)} (\mathfrak{R}_s(a)^* h_s,\ g_s)_s = \sum_{s \in S(A)} (h_s,\ \mathfrak{R}_s(a) g_s)_s =$$

$$= (h,\ \mathfrak{R}(a)g) = (\mathfrak{R}(a)^* h,\ g).$$

Из-за произвольности $h,\ g \in H$ получаем $\mathfrak{R}(a^*) = \mathfrak{R}(a)^*$, что и нужно.

Осталось проверить только изометричность $*$-представления $\mathfrak{R}$, т. е. равенства $\|\mathfrak{R}(a)\| = \|a\|$ при всех $a \in A$. Пусть для начала a — это положительный элемент. Из непрерывного функционального исчисления и теоремы Вейерштрасса 9.4.5 следует: $\|a\| \in \operatorname{Sp}(a)$. На основании 11.9.3 (1) существует состояние $s \in S(A)$, для которого $s(a) = \|a\|$. Учитывая свойства вектора x_s, соответствующего $*$-представлению $\mathfrak{R}_s$ (см. 11.9.10), и привлекая неравенство Коши — Буняковского 6.1.5, получаем

$$\|a\| = s(a) = (\mathfrak{R}_s(a)x_s, x_s)_s \le \|\mathfrak{R}_s(a)x_s\|_{H_s} \|x_s\|_{H_s} \le$$

$$\le \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} \|x_s\|^2_{H_s} = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} (x_s, x_s)_s =$$

$$= \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} (\mathfrak{R}_s(1)x_s,\ x_s)_s = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} s(1) = \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}.$$

Используя оценки $\|\mathfrak{R}(a)\| \ge \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)}$ и $\|a\| \ge \|\mathfrak{R}(a)\|$, первая из которых очевидна, а вторая указана в 11.8.5, выводим:

$$\|a\| \ge \|\mathfrak{R}(a)\| \ge \|\mathfrak{R}_s(a)\|_{B(H_s)} \ge \|a\|.$$

Возьмем, наконец, произвольный элемент a из A. По лемме Капланского — Фукамия 11.9.7 элемент a^*a положителен. Таким образом, можно заключить:

$$\|\mathfrak{R}(a)\|^2 = \|\mathfrak{R}(a)^* \mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a^*)\mathfrak{R}(a)\| = \|\mathfrak{R}(a^*a)\| = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Дальнейшее не требует особых разъяснений. $\triangleright$

Упражнения

11.1. Привести примеры банаховых алгебр и не банаховых алгебр.

11.2. Пусть A — банахова алгебра и $\chi \in A^{\#}$ таков, что $\chi(1) = 1$ и при этом $\chi(\operatorname{Inv}(A)) \subset \operatorname{Inv}(\mathbb{C})$. Доказать, что χ мультипликативен и непрерывен.

11.3. Пусть спектр $\operatorname{Sp}(a)$ элемента a банаховой алгебры A лежит в открытом множестве U. Доказать, что имеется число $\varepsilon > 0$ такое, что $\operatorname{Sp}(a + b) \subset U$ при всех $b \in A$, для которых $\|b\| \le \varepsilon$.

11.4. Описать пространства максимальных идеалов в алгебрах $C(Q,\ \mathbb{C})$, $C^{(1)}([0,\ 1],\ \mathbb{C})$ с поточечным умножением, в алгебре двусторонних суммируемых последовательностей $l_1(\mathbb{Z})$ со свёрточным умножением

$$(a * b)(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k.$$

11.5. Установить, что в банаховой алгебре $B(X)$ элемент T имеет левый обратный в том и только в том случае, когда T — мономорфизм и образ T дополняем в X.

11.6. Установить, что в банаховой алгебре $B(X)$ элемент T имеет правый обратный в том и только в том случае, если T — эпиморфизм и ядро T дополняемо в X.

11.7. В банаховой алгебре A есть элемент с несвязным спектром. Доказать, что в A найдется нетривиальный идемпотент.

11.8. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей и E — некоторое множество ее максимальных идеалов. Множество E называют *границей* A, если для всякого $a \in A$ выполнено

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup |\hat{a}(E)|.$$

Доказать, что пересечение всех замкнутых границ A также служит границей A. Ее называют *границей Шилова* алгебры A.

11.9. Пусть $A,\ B$ — коммутативные банаховы алгебры с единицей, причем $B \subset A$ и $1_B = 1_A$. Доказать, что всякий максимальный идеал границы Шилова алгебры B содержится в некотором максимальном идеале A.

11.10. Пусть A и B — две C^*-алгебры (с единицей) и T — морфизм A в B. Пусть, далее, a — нормальный элемент A и f — непрерывная функция на $\mathrm{Sp}_A(a)$. Установить, что $\mathrm{Sp}_B(Ta) \subset \mathrm{Sp}_A(a)$ и $Tf(a) = f(Ta)$.

11.11. Пусть $f \in A'$, где A — коммутативная C^*-алгебра. Установить, что f — положительная форма, т. е. $f(a^*a) \geq 0$ для $a \in A$, в том и только в том случае, если $\|f\| = f(1)$.

11.12. Описать крайние лучи множества положительных форм в коммутативной C^*-алгебре.

11.13. Доказать, что алгебры $C(Q_1,\ \mathbb{C})$ и $C(Q_2,\ \mathbb{C})$ изоморфны в том и только в том случае, если компакты Q_1 и Q_2 гомеоморфны.

11.14. Пусть некоторый нормальный элемент C^*-алгебры имеет вещественный спектр. Доказать, что он эрмитов.

11.15. Развить спектральную теорию нормальных операторов в гильбертовом пространстве с помощью непрерывного функционального исчисления. Описать компактные нормальные операторы.

11.16. Пусть T — алгебраический морфизм C^*-алгебр, причем $\|T\| \leq 1$. Тогда $T(a^*) = (Ta)^*$ для всех a.

11.17. Пусть T — нормальный оператор на гильбертовом пространстве H. Убедиться, что существуют эрмитов оператор S на H и непрерывная функция $f : \mathrm{Sp}(S) \to \mathbb{C}$ такие, что $T = f(S)$. Справедливо ли аналогичное утверждение в C^*-алгебрах?

11.18. Пусть A, B — две C^*-алгебры и ρ — это $*$-мономорфизм из A в B. Доказать, что ρ — изометрическое вложение A в B.

11.19. Пусть a, b — эрмитовы элементы C^*-алгебры A, причем $ab = ba$ и, кроме того, $a \leq b$. Доказать, что $f(a) \leq f(b)$ для подходящих сужений любой возрастающей непрерывной скалярной функции f на $\mathbb{R}$.