Упражнения

2.1. Привести примеры векторных пространств, а также и не векторных пространств. Какие конструкции приводят к векторным пространствам?

2.2. Изучить векторные пространства над двухэлементным полем $\mathbb{Z}_2$.

2.3. Описать векторное пространство со счетным базисом Гамеля.

2.4. Доказать существование разрывных решений $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Как представить такие f графически?

2.5. Доказать, что пространство, алгебраически сопряженное к прямой сумме, реализуется как прямое произведение.

2.6. Пусть $X \supset X_0 \supset X_{00}$. Доказать, что X/X_{00} и $(X/X_0)/(X_{00}/X_0)$ — изоморфные пространства.

2.7. Пусть отображение «двойной диез» определено правилом:

$$x^{\#\#} : x^{\#} \mapsto \langle x \,|\, x^{\#} \rangle \quad (x \in X,\ x^{\#} \in X^{\#}).$$

Установить, что это отображение осуществляет вложение векторного пространства X во второе сопряженное пространство $X^{\#\#}$.

2.8. Доказать, что алгебраически рефлексивными являются конечномерные пространства и только они, т. е.

$$^{\#\#}(X) = X^{\#\#} \Leftrightarrow \dim X < +\infty.$$

2.9. Есть ли аналоги базисов Гамеля в общих модулях?

2.10. При каких условиях сумма проекторов будет проектором?

2.11. Пусть T — эндоморфизм некоторого векторного пространства, причем $T^{n-1} \neq 0$ и $T^n = 0$ для какого-то натурального n. Доказать, что операторы $T^0,\ T, \dots, T^{n-1}$ линейно независимы.

2.12. Описать строение линейных операторов, определенных на прямой сумме пространств и действующих в произведение пространств.

2.13. Найти условия единственности решений следующих уравнений в операторах $\mathscr{X}A = B$ и $A\mathscr{X} = B$ (здесь неизвестным является оператор $\mathscr{X}$).

2.14. Как устроено пространство билинейных операторов?

2.15. Охарактеризовать векторные пространства, возникающие в результате овеществления комплексных векторных пространств.

2.16. Для семейства линейно независимых векторов $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$ подыскать такое семейство функционалов $(x_e^{\#})_{e\in\mathscr{E}}$, чтобы выполнялись соотношения:

$$\langle x_e \,|\, x_e^{\#}\rangle = 1 \quad (e \in \mathscr{E});$$

$$\langle x_e \,|\, x_e^{\#}\rangle = 0 \quad (e,\ e' \in \mathscr{E},\ e \neq e').$$

2.17. Для семейства линейно независимых функционалов $(x_e^{\#})_{e\in\mathscr{E}}$ подыскать такое семейство векторов $(x_e)_{e\in\mathscr{E}}$, чтобы выполнялись соотношения:

$$\langle x_e \,|\, x_e^{\#}\rangle = 1 \quad (e \in \mathscr{E});$$

$$\langle x_e \,|\, x_e^{\#}\rangle = 0 \quad (e,\ e' \in \mathscr{E},\ e \neq e').$$

2.18. Найти условия совместности системы линейных уравнений и линейных неравенств в вещественных векторных пространствах.

2.19. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{cccc}
W \longrightarrow & X \xrightarrow{T} & Y \longrightarrow & Z \\
\alpha \downarrow & \beta \downarrow & \gamma \downarrow & \delta \downarrow \\
\overline{W} \longrightarrow & \overline{X} \xrightarrow{\overline{T}} & \overline{Y} \longrightarrow & \overline{Z}
\end{array}$$

с точными сторонами, причем α — эпиморфизм, а δ — мономорфизм. Доказать, что $\ker\gamma = T(\ker\beta)$ и $\overline{T}^{-1}(\operatorname{im}\gamma) = \operatorname{im}\beta$.