Упражнения

3.1. Установить, что гиперплоскостями служат в точности максимальные по включению аффинные множества, не совпадающие со всем пространством.

3.2. Доказать, что каждое аффинное множество представляет собой пересечение гиперплоскостей.

3.3. Доказать, что в вещественном векторном пространстве дополнение гиперплоскости состоит из двух выпуклых множеств, каждое из которых совпадает со своим ядром. Такие множества именуют открытыми полупространствами. Объединение открытого полупространства с исходной гиперплоскостью называют замкнутым полупространством. Найти способы задания полупространств.

3.4. Найти возможные представления элементов выпуклой оболочки конечного числа точек. Как учесть конечномерность пространства, в котором ведется рассмотрение?

3.5. Для множеств S_1 и S_2 полагают $S = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda S_1 \cap (1-\lambda) S_2$. Доказать, что S выпукло при условии выпуклости S_1 и S_2.

3.6. Вычислить функционалы Минковского полупространства, конуса, выпуклой оболочки объединения и пересечения конических отрезков.

3.7. Пусть $S := \{p + q \leq 1\}$, где $p,\ q$ — функционалы Минковского конических отрезков S_p и S_q. Выразить S через S_p и S_q.

3.8. Описать сублинейные функционалы, определенные на $\mathbb{R}^N$.

3.9. Вычислить субдифференциал максимума конечного числа линейных функционалов.

3.10. Пусть $p,\ q$ — сублинейные функционалы, находящиеся в общем положении, т. е. такие, что

$$\operatorname{dom} p - \operatorname{dom} q = \operatorname{dom} q - \operatorname{dom} p.$$

Доказать симметричную формулу Хана — Банаха (ср. 3.5.7)

$$\partial(p+q) = \partial p + \partial q.$$

3.11. Пусть $p,\ q : X \to \mathbb{R}$ — всюду определенные на X сублинейные функционалы. Тогда выполнено равенство

$$\partial(p \vee q) = \operatorname{co}(\partial p \cup \partial q).$$

3.12. Найти функционал Минковского шара с необязательно нулевым центром симметрии в гильбертовом пространстве.

3.13. Симметричную квадратную 2×2-матрицу назовем положительной, если у нее положительные собственные числа. Согласован ли возникающий порядок в пространстве таких матриц с векторной структурой? Определяет ли он структуру пространства Канторовича?

3.14. На каждом ли упорядоченном векторном пространстве можно задать нетривиальный положительный функционал?

3.15. Какими способами $\mathbb{R}^N$ можно превратить в K-пространство?

3.16. При каких условиях заключение теоремы Хана — Банаха в аналитической форме выполнено для не всюду определенного сублинейного функционала?

3.17. Для стандартной нормы в l_∞ найти крайние точки ее субдифференциала.

3.18. Найти возможные обобщения теоремы Хана — Банаха для отображений, действующих в пространства Канторовича.

3.19. Для множества C в пространстве X определить преобразование Хёрмандера $H(C)$ соотношением

$$H(C) = \{(x,\ t) \in X \times \mathbb{R} : x \in tC\}.$$

Изучить свойства преобразования Хёрмандера.