4.8.5. Определение. Пусть $D,\ D_1, \dots, D_n$ — замкнутые круги (= замкнутые шары) на плоскости, причем $D_m \cap D_k = \varnothing$ при $m \ne k$ и $D_1, \dots, D_n \subset \operatorname{int} D$. Множество

$$D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{int} D_k$$

называют *резным диском*. Всякое множество в плоскости, диффеоморфное (= «гладко гомеоморфное») некоторому резному диску, называют *связным элементарным компактом*. Объединение непустого конечного семейства попарно не пересекающихся связных элементарных компактов называют *элементарным компактом*.

4.8.6. Замечание. Граница ∂F элементарного компакта F состоит из конечного числа непересекающихся гладких простых петель. При этом вложение F в (ориентированную) плоскость $\mathbb{R}^2$ индуцирует в F структуру (ориентированного) многообразия с (ориентированным) краем ∂F. Отметим здесь же, что в силу 4.8.3 имеет смысл говорить о положительной ориентации гладкой петли, подразумевая ориентацию края компактной части плоскости, ограниченной этой петлей.

4.8.7. *Пусть K — компактное подмножество плоскости и G — непустое открытое множество, содержащее K. Тогда существует элементарный компакт F такой, что*

$$K \subset \operatorname{int} F \subset F \subset G. \ \triangleleft\triangleright$$

4.8.8. Определение. Множество F, наличие которого отмечено в 4.8.7, называют *простой картиной* для пары $(K,\ G)$.

Упражнения

4.1. Привести примеры метрических пространств. Выяснить, какими способами можно получать новые метрические пространства.

4.2. Каким должен быть фильтр в X^2, совпадающий с некоторой метрической равномерностью в X?

4.3. Пусть S — пространство измеримых функций на $[0,\ 1]$ с метрикой

$$d(f,\ g) := \int_0^1 \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt \quad (f,\ g \in S)$$

(подразумевается некоторая естественная факторизация — какая именно?). Выяснить смысл сходимости в этом пространстве.

4.4. Для $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ полагают

$$d(\alpha,\ \beta) = 1/\min\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq \beta_k\}.$$

Проверить, что d — метрика и что пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел.

4.5. Можно ли метризовать поточечную сходимость последовательностей? А функций?

4.6. Как следует ввести разумную метрику в счетное произведение метрических пространств? В произвольное произведение метрических пространств?

4.7. Выяснить, какие классы функций описываются ошибочными определениями непрерывности и равномерной непрерывности.

4.8. Для непустых компактных подмножеств A и B пространства $\mathbb{R}^N$ положим

$$d(A,\ B) := \left(\sup_{x\in A}\ \inf_{y\in B}\ |x-y|\right) \vee \left(\sup_{y\in B}\ \inf_{x\in A}\ |x-y|\right).$$

Установить, что d — метрика. Ее называют метрикой Хаусдорфа. Каков смысл сходимости в этой метрике?

4.9. Доказать, что непустые выпуклые компактные подмножества выпуклого компакта в $\mathbb{R}^N$ составляют компакт относительно метрики Хаусдорфа. Какова связь этого утверждения с теоремой Арцела — Асколи?

4.10. Доказать, что каждая полунепрерывная снизу функция на $\mathbb{R}^N$ есть верхняя огибающая некоторого семейства непрерывных функций.

4.11. Выяснить связи между непрерывными и замкнутыми (как множества в произведении) отображениями метрических пространств.

4.12. Выяснить, когда непрерывное отображение метрического пространства в полное метрическое пространство допускает распространение на пополнение исходного пространства.

4.13. Описать компактные множества в произведении метрических пространств.

4.14. Пусть $(Y,\ d)$ — полное метрическое пространство. Отображение $F: Y \to Y$ называют расширяющимся, если $d(F(x),\ F(y)) \geq \beta d(x,\ y)$ для некоторого $\beta > 1$ и $x,\ y \in Y$. Пусть расширяющееся отображение $F: Y \to Y$ действует на Y. Доказать, что F взаимно однозначно и обладает единственной неподвижной точкой.

4.15. Доказать, что компакт не отображается изометрично на свою собственную часть.

4.16. Установить нормальность произвольного метрического пространства.

4.17. При каких условиях счетное подмножество полного метрического пространства является нетощим?

4.18. Можно ли охарактеризовать равномерную непрерывность в терминах сходящихся последовательностей?

4.19. На каких метрических пространствах любая непрерывная вещественная функция достигает точные границы множества своих значений? Ограничена?