

(которое обеспечит соотношение  $1 \notin \text{Sp}(TS)$ ). Следующие прямые выкладки:

$$\begin{aligned} & (1 + T(1 - ST)^{-1}S)(1 - TS) = \\ & = 1 + T(1 - ST)^{-1}S - TS + T(1 - ST)^{-1}(-ST)S = \\ & = 1 + T(1 - ST)^{-1}S - TS + T(1 - ST)^{-1}(1 - ST - 1)S = \\ & = 1 + T(1 - ST)^{-1}S - TS + TS - T(1 - ST)^{-1}S = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1 - TS)(1 + T(1 - ST)^{-1}S) = \\ & = 1 - TS + T(1 - ST)^{-1}S + T(-ST)(1 - ST)^{-1}S = \\ & = 1 - TS + T(1 - ST)^{-1}S + T(1 - ST - 1)(1 - ST)^{-1}S = \\ & = 1 - TS + T(1 - ST)^{-1}S + TS - T(1 - ST)^{-1}S = 1 \end{aligned}$$

доказывают искомое представление, а вместе с тем и теорему.  $\triangleright$

### Упражнения

**5.1.** Доказать, что нормированное пространство конечномерно в том и только в том случае, если любой линейный функционал на нем ограничен.

**5.2.** Проверить, что в каждом векторном пространстве можно определить норму.

**5.3.** Установить, что векторное пространство конечномерно в том и только в том случае, если все нормы в нем эквивалентны.

**5.4.** Доказать, что отделимые мультиметрики задают одну и ту же топологию конечномерного пространства.

**5.5.** Каждую ли норму в  $\mathbb{R}^N$  можно использовать для нормировки произведения  $N$  нормированных пространств?

**5.6.** Выяснить условия непрерывности конечномерного оператора, действующего в мультинормированных пространствах.

**5.7.** Описать операторные нормы в пространстве квадратных матриц. Когда такие нормы сравнимы?

**5.8.** Найти расстояние между гиперплоскостями в нормированном пространстве.

**5.9.** Выяснить общий вид непрерывных линейных функционалов в классических пространствах.

**5.10.** Изучить вопрос о рефлексивности классических банаховых пространств.

**5.11.** Выяснить взаиморасположение пространств  $l_p$  и  $l_q$ ,  $L_p$  и  $L_q$ . Когда дополнение одного из элементов каждой пары плотно в оставшемся?

**5.12.** Найти спектр и резольвенту оператора Вольтерра, проектора, одномерного оператора.

**5.13.** Построить оператор, спектр которого — наперед заданный непустой компакт в  $\mathbb{C}$ .

**5.14.** Доказать, что тождественный оператор (в ненулевом пространстве) не может быть коммутатором двух эндоморфизмов.

**5.15.** Как определить спектр оператора в мультиноммированном пространстве?

**5.16.** Каждое ли банахово пространство над  $\mathbb{F}$  допускает изометрическое вложение в пространство  $C(Q, \mathbb{F})$ , где  $Q$  — компактное пространство?

**5.17.** Выяснить, в каких случаях  $L_p(X)' = L_{p'}(X')$ , где  $X$  — банахово пространство.

**5.18.** Пусть  $(X_n)$  — последовательность нормированных пространств и

$$X_0 := \left\{ x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n : \|x_n\|_{X_n} \rightarrow 0 \right\}$$

— их сумма по типу  $c_0$  (с нормой  $\|x\| := \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ , взятой из суммы по типу  $l_\infty$ ). Доказать, что  $X_0$  сепарабельно в том и только в том случае, когда сепарабельно каждое из пространств  $X_n$ .

**5.19.** Доказать, что пространство  $C^{(p)}[0, 1]$  представляет собой сумму конечномерного подпространства и пространства, изоморфного  $C[0, 1]$ .