Окончательно, учитывая соотношение $\lambda_k \downarrow 0$, имеем

$$\left\| T - \sum_{k=1}^{n} \mu_k e'_k \otimes f_k \right\| \le \mu_{n+1} \to 0. \quad \triangleright$$

6.6.10. Замечание. Теорема 6.6.9 означает, в частности, что компактные операторы (и только они) суть точки прикосновения множества конечномерных операторов. Этот факт выражают еще и так: «гильбертово пространство обладает свойством аппроксимации».

Упражнения

6.1. Найти крайние точки шара гильбертова пространства.

6.2. Выяснить, какие из классических банаховых пространств гильбертовы, а какие — нет.

6.3. Будет ли гильбертовым фактор-пространство гильбертова пространства?

6.4. Каждое ли банахово пространство вкладывается в гильбертово пространство?

6.5. Может ли быть гильбертовым пространство ограниченных эндоморфизмов гильбертова пространства?

6.6. Описать второе ортогональное дополнение к множеству.

6.7. Доказать, что ни один гильбертов базис бесконечномерного гильбертова пространства не является базисом Гамеля.

6.8. Построить на отрезке наилучшее приближение в метрике L_2 полинома степени $n+1$ полиномами степени не выше n.

6.9. Доказать, что $x \perp y$ в том и только в том случае, если $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ и $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

6.10. Для ограниченного оператора T установить соотношения

$$(\ker T)^\perp = \operatorname{cl} \operatorname{im} T^*, \quad (\operatorname{im} T)^\perp = \ker T^*.$$

6.11. Выяснить связи между эрмитовыми формами и эрмитовыми операторами.

6.12. Найти эрмитово сопряженные операторы к операторам сдвига, умножения, к конечномерному оператору.

6.13. Доказать, что оператор в гильбертовом пространстве компактен в том и только в том случае, если компактен эрмитово сопряженный к нему оператор. Как связаны соответствующие канонические представления этих операторов?

6.14. Пусть известно, что оператор T — изометрия. Будет ли изометрией оператор T^*?

6.15. Частичная изометрия — это оператор, являющийся изометрией на ортогональном дополнении своего ядра. Как устроен эрмитово сопряженный к частичной изометрии оператор?

6.16. Каковы крайние точки единичного шара в пространстве эндоморфизмов гильбертова пространства?

6.17. Доказать, что при сужении на шар слабая топология сепарабельного гильбертова пространства становится метризуемой.

6.18. Доказать, что идемпотент оператора P в гильбертовом пространстве является ортопроектором в том и только в том случае, если P коммутирует с P^*.

6.19. Пусть $(a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}}$ — бесконечная матрица такая, что $a_{kl} \geq 0$ для всех k, l и, кроме того, имеются также p_k и β, $\gamma > 0$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}p_k \leq \beta p_l; \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}p_l \leq \gamma p_k \quad (k,\ l \in \mathbb{N}).$$

Тогда существует оператор $T \in B(l_2)$ такой, что $(e_k,\ e_l) = a_{kl}$ и $\|T\| = \sqrt{\beta\gamma}$ (где e_k — канонический базис в l_2, составленный характеристическими функциями точек из $\mathbb{N}$).